

Физическая визуализация множеств достижимости в задачах управления*

В.С. Пацко, И.С. Стародубцев, А.А. Федотов

patsko@imm.uran.ru | starodubtsevis@imm.uran.ru | andreyfedotov@mail.ru

Екатеринбург, Россия, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН

Работа посвящена использованию технологии 3D-печати для полноразмерного построения множеств достижимости в задачах управления. В качестве примера рассмотрена нелинейная модель динамики простейшего автомобиля с трёхмерным фазовым вектором и скалярным управлением, ограниченным по модулю (машина Дубинса). Текущее состояние системы включает положение на плоскости и угол направления вектора скорости. Величина скорости считается постоянной. Рассматриваются множества достижимости в момент и к моменту. Они представляют собой невыпуклые множества, граница которых в целом не является гладкой. Особенности структуры рассматриваемых множеств лучше воспринимаются при их представлении в виде трёхмерных фигур, полученных с использованием 3D-печати. Граница множеств достижимости формируется в форматах VRML и STL. Приведены примеры визуализации результатов расчётов, включая вывод на 3D-принтер. Рассмотрены проблемы, возникающие при выводе поверхностей сложной формы на трёхмерную печать.

Ключевые слова: задачи управления, множества достижимости, 3D-печать, FDM-печать, физическая визуализация

Physical visualization of reachable sets in control problems*

V.S. Patsko, I.S. Starodubtsev, A.A. Fedotov

Yekaterinburg, Russia, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS

The paper deals with a technology of 3D-printing for a full-sized constructing of reachable sets in control problems. As an example, we consider a simple car model with nonlinear dynamics that has a three-dimensional phase vector and scalar control constrained by modulus (the Dubins car). The system state includes a position in the plane and an angle of the velocity vector. The value of the velocity is constant. The reachable sets are investigated both at the given instant and till the given instant. They are non-convex ones, and their boundary is not smooth in the whole. The best interpretation of peculiarities of the sets' structure is provided by their representation in the form of the three-dimensional shapes obtained using the 3D-printing. The boundary of the reachable set is formed in formats VRML and STL. The paper gives examples of visualization of calculation results including 3D-printer samples. The problems associated with the output of the surfaces of complex shapes onto the 3D-printing are considered.

Keywords: control problems, reachable sets, 3D-printing, FDM-technology, physical visualization

Введение

В математической теории управления множеством достижимости $G(t; t_0, z_0)$ в фиксированный момент времени T называется множество, состоящее из всех точек, в каждую из которых управляемая система может быть переведена в оговоренный момент T из начальной точки z_0 , взятой в момент t_0 , при помощи допустимого управления. Под допустимыми управлениями можно понимать кусочно-непрерывные функции времени $t \rightarrow u(t)$, принимающие значения из заданного множества P . Таким образом, если динамика системы описывается стационарным векторным дифференциальным уравнением $\dot{z} = f(z, u)$, $u(t) \in P$, и $z(t; z_0, u(\cdot))$ – положение в момент t решения, выходящего при t_0 из

начальной точки z_0 , то

$$G(T; z_0) = \bigcup_{u(\cdot)} z(T; z_0, u(\cdot)).$$

Объединение берётся по всем допустимым управлениям $u(\cdot)$.

Во многих случаях множество достижимости в классе кусочно-непрерывных управлений является замкнутым. Поэтому нет нужды в расширении класса допустимых управлений. Если для стационарной системы речь идёт о множестве достижимости $G^*(T; z_0)$ к моменту T , то

$$G(T; z_0) = \bigcup_{t \in [0, T]} \bigcup_{u(\cdot)} z(t; z_0, u(\cdot)).$$

Здесь дополнительно осуществляется объединение по всем моментам $t \in [0, T]$.

С появлением 3D-принтеров открылась возможность полноразмерного изображения трёхмерных

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления» и опубликована при финансовой поддержке РФФИ, грант 15-07-20347.

множеств достижимости. Наличие трёхмерных фигур, сделанных на 3D-принтере, облегчает понимание геометрии множеств достижимости.

Адекватная физическая визуализация снимает «мистику» и связанную с нею «боязнь» использования результатов математической теории управления у студентов и инженеров, занимающихся исследованием и решением прикладных задач.

В то же время, наглядность восприятия может подсказать «разумные» варианты аппроксимации трёхмерных объектов, при которых не теряются их принципиально важные качественные характеристики.

Пример задачи управления

Пусть, например, изучаются множества достижимости в момент t и к моменту для простейшей модели движения автомобиля (машина Дубинса). Динамика записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{k}{V} u, \end{aligned} \quad (1)$$

$$|u| \leq 1, V = \text{const} > 0, k = \text{const} > 0,$$

где x, y – координаты геометрического положения, φ – угол наклона вектора скорости (рис. 1), V – величина скорости, k – максимальное боковое ускорение. Допустимыми управлениями $u(\cdot)$ считаются кусочно-непрерывные функции времени, удовлетворяющие ограничению $|u(t)| \leq 1$. Значения угла φ рассматриваются на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

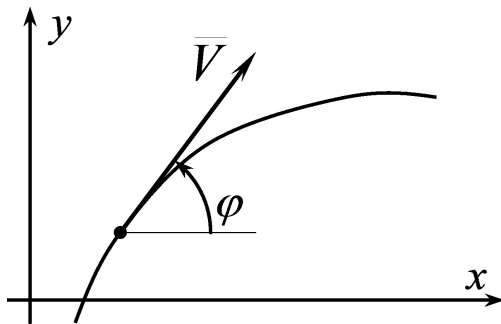


Рис. 1: Система координат.

Фазовый вектор (x, y, φ) системы (1) обозначим через z . Для краткости положим $\alpha = k/V$. Специфика системы (1) такова, что начальное состояние z_0 влияет на множество достижимости лишь с точностью до поворота и переноса. Поэтому полагаем $z_0 = 0$ и пишем $G(T)$, $G^*(T)$ вместо $G(T; z_0)$, $G^*(T; z_0)$.

В статье [1] установлен вид множеств достижимости $G(t)$ в проекции на плоскость геометрических

координат x, y . В статье [2] множества достижимости $G(T)$ исследовались в трёхмерном пространстве x, y, φ .

На рис. 2 показаны множества $G(t)$ для четырёх моментов времени. Видно, что множества не являются выпуклыми. Их граница в целом не является гладкой. При $T \geq \pi/\alpha$ множество $G(t)$ напоминает улитку. С ростом T происходит её «закручивание». В работе [3] изучены множества достижимости $G^*(T)$, а также множества достижимости $G(t)$ и $G^*(T)$ при несимметричных ограничениях на управление u . На рис. 3 показано множество $G(6\pi/\alpha)$ при несимметричном ограничении на управление. Множество достижимости $G^*(1.5\pi/\alpha)$ при симметричном ограничении $|u| \leq 1$ представлено на рис. 4.

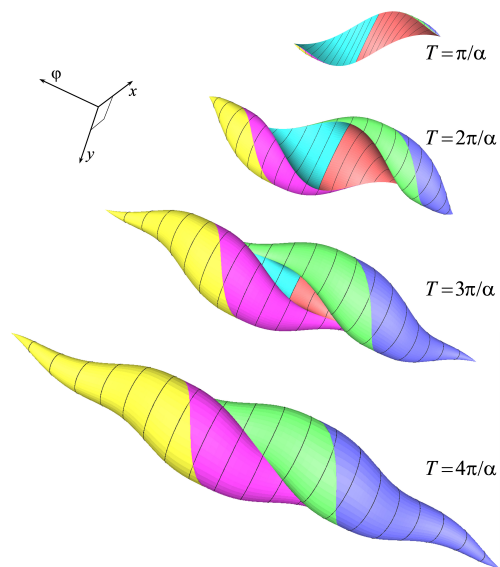


Рис. 2: Развитие множества достижимости $G(T)$.

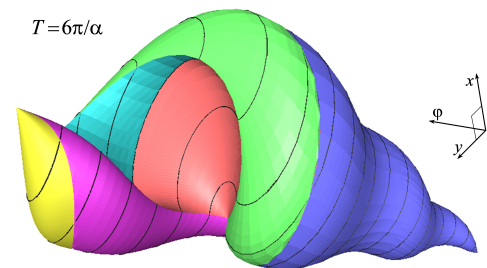


Рис. 3: Множество достижимости $G(T)$ для $T = 6\pi/\alpha$ при несимметричном ограничении $u \in [-1, +0.25]$.

Подготовка данных для 3D-принтера

Для получения в рамках системы (1) компьютерных изображений множеств достижимости ис-

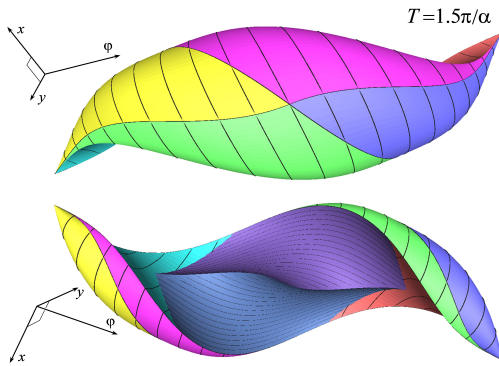


Рис. 4: Множество достижимости $G^*(T)$ для $T = 1.5\pi/\alpha$ в двух ракурсах.

пользовался формат VRML (v2.0). В соответствии с утверждением, доказанным в [2], граница множества достижимости $G(T)$ при симметричном ограничении $|u| \leq 1$ формируется из шести поверхностей, задаваемых в трёхмерном пространстве при помощи двух параметров, в качестве которых используются моменты переключения управления.

Одна из шести поверхностей отвечает значениям $-1, 0, 1$ управления, которые берутся по времени именно в таком порядке. В этом случае параметр t_1 соответствует моменту переключения с управления -1 на управление 0 , а параметр $t_2 \in [t_1, T]$ – с управления 0 на управление 1 . Другие пять поверхностей соответствуют наборам управлений $1, 0, -1$; $1, 0, 1$; $-1, 0, -1$; $1, -1, 1$; $-1, 1, -1$.

Для каждой поверхности задаётся равномерный по времени шаг формирования моментов переключения, в число которых формально включаются моменты 0 и T . Тем самым обеспечивается послойное построение рассматриваемых поверхностей с равномерным по углу φ шагом для всего множества $G(T)$. Это очень важно с точки зрения корректного сопряжения смежных поверхностей. При практическом построении поверхностей интервал $\pm\alpha T$ допустимых значений φ делится на чётное (для охвата нулевого значения) число $2m$ одинаковых отрезков. Для каждого узла на интервале по φ рассчитываются возможные движения системы (1) на промежутке $[0, T]$ из точки z_0 в силу конкретного варианта смены управления.

Шаг перебора моментов переключения для поверхностей, определяемых наборами $+1, 0, +1$ и $-1, 0, -1$, совпадает с шагом разбиения интервала по φ и составляет $\alpha T/m$. Для остальных четырёх поверхностей шаг перебора моментов переключения вдвое меньше.

Специфика поверхностей, образующих границу множества достижимости $G(T)$, состоит в том, что количество точек от слоя к слою по φ отличается не больше, чем на единицу, и один из крайних слоёв состоит из единственной точки. Это использу-

ется для корректного сопряжения слоёв при помощи наборов элементарных треугольных пространственных площадок в процессе формирования соответствующих трёхмерных объектов в форматах VRML и STL.

В случае несимметричного ограничения на управление u отличие состоит лишь в том, что общий интервал допустимых значений φ не является симметричным относительно нуля.

При подготовке к 3D-печати множеств $G^*(T)$ составляются данные для построения множества $G(T)$, к которым добавляются наборы треугольных пространственных площадок, сформированные в процессе обработки слоёв, полученных на сетке моментов времени от 0 до T при крайних управляющих воздействиях с одним моментом переключения в качестве параметра.

Таким образом, во всех случаях в текстовый файл в формате STL записывается совокупность поверхностей, содержащая границу множества достижимости. Не лежащие на границе множества части поверхностей находятся внутри формируемого объекта. Триангуляция поверхностей выполняется послойно с использованием свойства непрерывности сечений по φ для множеств достижимости в момент и по t у дополнительных поверхностей для множеств достижимости к моменту.

3D-печать множеств достижимости

Несколько вариантов множеств достижимости в момент и к моменту были подготовлены и распечатаны на 3D-принтере PP3DP UP!Mini. На рис. 5 показаны множества достижимости $G(T)$ в моменты $T = 2\pi/\alpha$, $3\pi/\alpha$, $4\pi/\alpha$.

Исследования в области физической визуализации и, в частности, 3D-печати в последние годы набирают популярность. В работе [4] проводится обзор применения таких технологий в различных областях науки и медицины.

Методы 3D-печати предъявляют более жесткие требования к визуализируемому объекту в сравнении с визуализацией при помощи традиционных средств компьютерной графики.

Воспользуемся следующими понятиями:

- *Слайсер* – программа перевода 3D-модели в управляющий код для 3D-принтера. Она необходима, так как принтер не сможет загрузить сразу 3D-модель. Существуют принтеры, у которых слайсер является частью внутреннего ПО.
- *Слайсинг* – процесс перевода 3D-модели в управляющий код.

Выбор технологии печати

Существует несколько видов 3D-печати, использующих различные технологии и материалы. Для



Рис. 5: Множества $G(T)$ для $T = 2\pi/\alpha, 3\pi/\alpha, 4\pi/\alpha$.

визуализации множеств достижимости была использована технология FDM (Fused Deposition Modeling) печати расплавленной нитью ABS пластика.

Модель режется (слайсится) по слоям. Каждый слой состоит из периметра, заливки и/или поддержек (рис. 6). Модель может иметь разный процент заполнения заливкой. Возможно и отсутствие заливки (пустотелая модель).

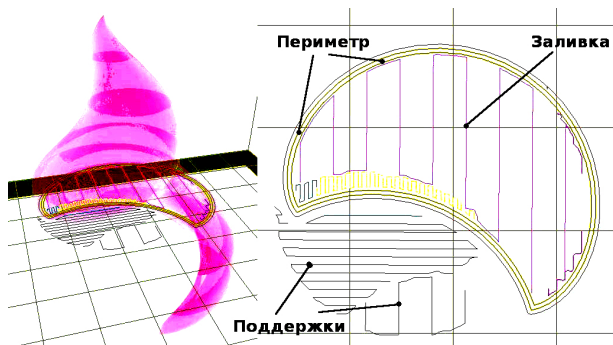


Рис. 6: Слой, получившийся в результате слайсинга.

На каждом слое происходят перемещения по осям XU с нанесением расплава пластика. После печати одного слоя происходит перемещение по оси Z на слой выше, печатается следующий слой и так далее.

Некоторые ошибки модели

Перечислим основные проблем, которые были решены при подготовке множеств достижимости к печати.

Инвертированные нормали

В файлах моделей формата STL нормали задаются в явном виде. В формате VRML (v2.0) нормали рассчитываются с учётом порядка вершин. Наличие

инвертированных нормалей может привести к разным последствиям, среди которых: неправильный расчёт толщины стенки; неправильный расчёт области внутренней заливки; невозможность построения автоматических поддержек.

Неоднородная сетка

1. Отверстия в сетке возникают тогда, когда не создана грань или не заполнена отдельная часть геометрии. Для однозначного расчёта областей печати необходимо выполнение условия «водонепроницаемости» модели, т. е. компактности сечений множества.

2. Внутренние грани – это грани, располагающиеся внутри модели. Модель может быть «водонепроницаемой», но присутствие внутри сетки внутренних граней приводит к неверному расчету внутренней заливки.

3. Налагающиеся грани появляются в случае, когда создаётся дополнительная поверхность поверх уже существующей. Такие грани иногда трудно обнаружить по причине того, что они могут опираться на одни и те же вершины.

4. Общие рёбра связывают более двух граней. При этом может возникать противоречие в определении множества граничных / внутренних точек сечения и множества точек периметра.

5. Геометрия нулевой толщины возникает при наличии нескольких близко расположенных граней, параллельных или имеющих малый двугранный угол между собственными плоскостями. Из-за дискретности слайсинга это может привести к появлению артефактов или невозможности печати некоторых частей объекта.

На рис. 7 показан пример некорректного (из-за ошибок модели) формирования слоёв одного из вариантов множества достижимости в процессе слайсинга. Вследствие наличия инвертированных нормалей и внутренних граней были неверно рассчитаны внешний и внутренний периметры. Множество внутренних точек также было рассчитано неверно из-за наличия незамкнутого контура на внутренней геометрии. Синими линиями отмечены пути с совпадающими рёбрами и частично налагающимися гранями.

На рис. 6 была приведена та же самая модель множества достижимости, но уже после учёта указанных ошибок.

Особенности FDM-технологии печати

Ниже идёт описание того, что нельзя назвать ошибками. Скорее, это особенности технологии, на которые необходимо делать поправку для получения качественного результата.

1. Толщина стенки. Стенки должны быть равными или толще, чем диаметр сопла принтера. Иначе

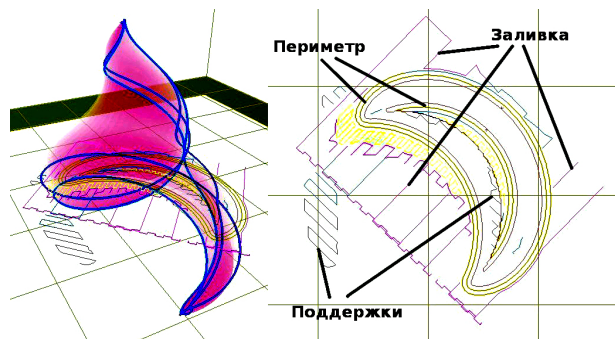


Рис. 7: Пример некорректного формирования слоёв вследствие ошибок модели.

принтер просто не сможет их напечатать. Толщина стенки зависит от диаметра сопла и числа печатаемых периметров. Так, при трёх периметрах и сопле 0.5 мм толщина стенок должна быть от 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 мм, а свыше может быть любой. Т. е. толщина стенки должна быть кратна диаметру сопла, если она меньше $N \cdot d$, где N – количество периметров, d – диаметр сопла.

2. Ориентация объекта. Конечный результат печати объекта может зависеть от ориентации объекта. Отметим следующее:

- Из-за дискретности процесса слайсинга на печатаемой поверхности отображается горизонтальное наслоение, что является неотъемлемым процессом 3D-печати по технологии FDM. Можно либо изменить пространственную ориентацию модели для минимизации влияния наслоения, либо использовать его, чтобы подчеркнуть грани модели.

- Цилиндрические грани, напечатанные с боковой поверхности, могут быть менее округлыми, нежели такие же грани, напечатанные в вертикальной ориентации.

- Прочность/длина: тонкие и прямые элементы будут прочнее при условии их печати в горизонтальном расположении, нежели в вертикальном. Это связано с тем, что связи между слоями являются менее прочными, чем внутри одного слоя.

3. Нависающие элементы. Для каждого нависающего элемента (пример показан на рис. 8) необходима поддерживающая конструкция – *поддержка*. Чем меньше нависающих элементов, тем меньше нужно поддержек. Стало быть, уменьшаются трата материала и время печати. Кроме того, поддержка портит поверхность, соприкасающуюся с ней.

4. Точность. Точность по осям XU зависит от люфтов, жёсткости конструкции, ремней и другой механики принтера. Она составляет примерно 0.3 мм для непрофессиональных принтеров. Точность по оси Z определяется высотой слоя (0.1–0.4 мм). Поэтому высота модели будет кратна высоте слоя.

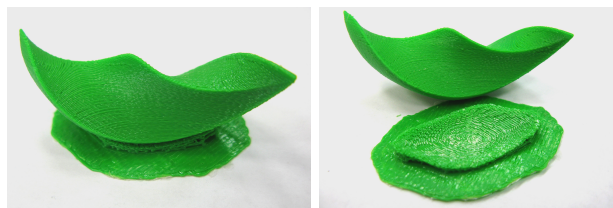


Рис. 8: Множество достижимости к моменту $T = \pi/\alpha$. Пример создания устойчивой поддержки при печати.

Существует и программная сторона проблемы: не каждый слайсер корректно обрабатывает внутренние размеры. Поэтому диаметр отверстий лучше увеличить на 0.1 – 0.2 мм.

5. Изменение геометрии. Необходимо учитывать, что после остывания материал усаживается, поэтому изменяется геометрия объекта. На больших объектах это может привести к «загибанию» краев объекта, в некоторых случаях – даже к отрыву печатаемой модели от стола печати.

Другой аспект термоусадки – появление внутреннего напряжения в материале. Если сделать сплошную заливку модели, то при достаточной площади сечения силы внутреннего напряжения могут привести к искажению (вплоть до разрыва) распечатанной модели. Поэтому применяется частичное заполнение модели материалом в виде различных конфигураций равномерной сетки. При этом обеспечиваются:

- Компенсация внутренних напряжений.
- Добавление прочности модели. Частичное заполнение формирует рёбра жёсткости, которые позволяют еще неостывшим мягким частям модели не деформироваться под собственной тяжестью.
- Уменьшение количества материала и времени печати.

При печати множеств достижимости чаще всего использовались конфигурации внутреннего заполнения в виде *прямоугольной сетки*. В этом случае требуется наименьшее количество материала и времени. На рис. 9 приведён срез распечатанного объекта, на котором видна такая структура заполнения.

Некоторые из описанных особенностей учитываются автоматически (на уровне слайсера или внутренней программы принтера). Например, формирование структуры внутреннего заполнения или расчёт элементов поддержки, как правило, отдаются на автоматический расчёт, а пользователем контролируются только такие параметры как «плотность», «частота» шага и угол скоса, при котором необходимо создавать поддержку.

Другие особенности необходимо обрабатывать вручную, так как в случае неоднозначности (дыры



Рис. 9: Срез распечатанной модели.

геометрии, неоднородности сетки, неверные нормали) результат автоматической обработки может быть непредсказуемым.

В настоящий момент проводятся исследования, направленные на автоматизацию процесса подготовки абстрактных математических множеств к физической визуализации.

Заключение

В статье описываются результаты практических расчётов множеств достижимости и их воспроиз-

ведение посредством 3D-печати для динамического объекта, известного, как «машина Дубинса». Множества достижимости имеют нетривиальную геометрию. Тем не менее, в результате обработки полученных пространственных объектов удалось добиться не только весьма хорошего качества пространственного изображения объектов, но и формулировки критериев, необходимых для успешной физической визуализации.

Благодарность

Авторы признательны В. Л. Авербуху за внимание к работе.

Литература

- [1] *Cockayne E. J., Hall G. W. C.* Plane motion of a particle subject to curvature constraints // *SIAM J. Control*, 1975. – Vol. 13, No.1. – pp. 197–220.
- [2] *Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А.* Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2003. – № 3 – С. 8–16.
- [3] *Fedotov A. A., Patsko V. S., Turova V. L.* Reachable Sets for Simple Models of Car Motion / Ed. by A. V. Topalov. Rijeka: InTech Open Access Publisher, 2011. – pp. 147–172.
- [4] *Horvath J.* Mastering 3D Printing. – 1st edition. – Berkely, CA, USA: Apress, 2014.