

О субполосном анализе изображений

Е.Г. Жилияков, А.А Черноморец

Факультет компьютерных наук и телекоммуникаций

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

Белгород, Россия

{zhilyakov, chernomorets}@bsu.edu.ru

Аннотация

Рассматривается задача описания свойств изображений с позиций разбиения области пространственных частот на подобласти (субполосный анализ). При этом основное внимание уделяется задаче вычисления точных значений долей энергии изображения в заданных подобластях пространственных частот и оптимальному выделению субполосных компонент.

Ключевые слова: изображение, доли энергии, подобласть пространственных частот, субполосные компоненты

In this article we consider the image properties describing task using the decomposition of spatial frequencies area to subareas subband analysis). We consider methods of computing the accurate image energy parts values in the given subareas of spatial frequencies and optimal selection of image subband components.

Keywords: image, energy parts, subarea of spatial frequencies, subband components

1. ВВЕДЕНИЕ

Опыт показывает, что частотные представления [1-5] служат адекватной математической основой для многих задач обработки изображений

$$f_{ik} = \iint_{-\pi-\pi}^{\pi-\pi} F(x, y) \exp(jx(i-1)) \exp(jy(k-1)) dx dy / 4\pi^2, \quad (1)$$

где j – мнимая единица ($j^2 = -1$); F – частотная характеристика, в качестве которой наиболее часто используется трансформанта Фурье $F^\Phi(x, y)$,

$$F^\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N f_{ik} \exp(-jx(i-1)) \exp(-jy(k-1)), \quad (2)$$

где f_{ik} , $i=1,2,\dots,N$, $k=1,2,\dots,M$, – значения изображения $\Phi = \{f_{ik}\}$ в соответствующих пикселях; x, y – пространственные частоты (ПЧ).

При этом многие задачи анализа и синтеза можно решать, используя разбиение области определения трансформанты Фурье на ряд подобластей пространственных частот (ПОПЧ) [2, 3], так что (1) принимает вид

$$f_{ik} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{s=1}^R \sum_{r=1}^S \iint_{(x,y) \in V_{sr}} F^\Phi(x, y) \exp(jx(i-1)) \exp(jy(k-1)) dx dy, \quad (3)$$

где

$$V_{sr} = \{ (x \in [-\Omega_{s2}, -\Omega_{s1}] \cup [\Omega_{s1}, \Omega_{s2}]) \cap (y \in [-\Omega_{r2}, -\Omega_{r1}] \cup [\Omega_{r1}, \Omega_{r2}]) \}, \quad (4)$$

$$\Omega_{s1} = 0 (s=1), \quad \Omega_{s,2} = \pi; \quad \Omega_{r1} = 0 (r=1), \quad \Omega_{r,2} = \pi;$$

$$\Omega_{s+1,1} = \Omega_{s,2}; \quad \Omega_{r+1,1} = \Omega_{r,2}.$$

Имеется в виду, что в подобласти V_{sr} переменная x принимает значения из интервала (субполосы) оси абсцисс плоскости ПЧ $D_s = [-\Omega_{s2}, -\Omega_{s1}] \cup [\Omega_{s1}, \Omega_{s2}]$, тогда как одновременно переменная y попадает в следующий интервал (субполосу) оси ординат $G_r = [-\Omega_{r2}, -\Omega_{r1}] \cup [\Omega_{r1}, \Omega_{r2}]$. Подобласть V_{sr} схематично изображена на рис. 1.

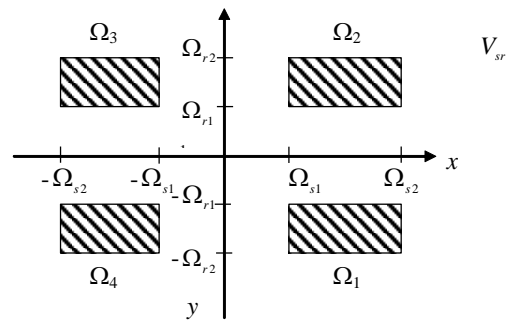


Рис. 1. Двумерная подобласть ПЧ V_{sr}

В работе рассмотрены субполосные модели, которые означают описание изображений с позиций некоторого разбиения области определения двумерной трансформанты Фурье на подобласти, например выделение компонент, определяемых одним из интегралов в соотношении (3) или оценивание их энергий.

2. СУБПОЛОСНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В рамках данной работы субполосной компонентой изображения из некоторой ПОПЧ вида (4) называется изображение $Y^{sr} = \{y_{ik}^{sr}\}$, $i=1,\dots,N$, $k=1,\dots,M$, определяемое соотношением

$$y_{ik}^{sr} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(x,y) \in V_{sr}} F^\Phi(x, y) \exp(jx(i-1)) \exp(jy(k-1)) dx dy. \quad (5)$$

Существенное значение имеет то обстоятельство, что субполосная компонента полностью определяется двумерным отрезком трансформанты Фурье из выбранной ПОПЧ. Поэтому корректное выделение этой компоненты позволяет адекватно судить о ее свойствах в пространственной области. В частности, субполосные компоненты могут проявлять характер периодичности вдоль некоторого направления, например, вдоль одной из осей координат.

Возникает проблема вычисления субполосных компонент, так как непосредственное использование определения (5) невозможно, потому что требует вычисления интегралов от предварительно вычисленных в континууме точек ПОПЧ двумерных отрезков трансформант Фурье.

В работе доказано следующее утверждение. Условию (5) удовлетворяет следующая компонента

$$y_{ik}^{sr} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M f_{nm} a_{in}^s b_{km}^r, \quad (6)$$

где

$$a_{in}^s = \int_{x \in D_s} \exp(-jx(i-n)) dx / 2\pi; \quad (7)$$

$$b_{km}^r = \int_{x \in G_r} \exp(-jx(k-m)) dx / 2\pi. \quad (8)$$

Напомним, что субполосы D_s и G_r определены выше.

Обозначив A_s и B_r множество значений (7), (8),

$$A_s = \{a_{in}^s\}, i, n = 1, \dots, N; B_r = \{b_{km}^r\}, k, m = 1, \dots, M, \quad (9)$$

совокупность соотношений (6) нетрудно представить в матричной форме

$$Y^{sr} = A_s \Phi B_r. \quad (10)$$

Отметим, что сумма субполосных компонент вида (10) при выполнении условий (4) на разбиение области определения исходной трансформанты Фурье в точности равна соответствующему изображению. Кроме того, выделение субполосных компонент можно использовать для фильтрации изображений и повышения их четкости [1].

3. МЕТОД АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЗАДАНЫМ ПОДОБЛАСТЯМ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Одним из основных фактов теории ортогональных представлений является равенство Парсевала, которое в случае трансформант Фурье имеет вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F^{\Phi}(x, y)|^2 dx dy / 4\pi^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N f_{ik}^2. \quad (11)$$

В контексте субполосных анализа и синтеза это равенство целесообразно представить в виде

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N f_{ik}^2 = \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^R P_{sr}(\Phi), \quad (12)$$

где

$$P_{sr}(\Phi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(x,y) \in V_{sr}} |F^{\Phi}(x, y)|^2 dx dy. \quad (13)$$

Представляется естественным интегралы вида (13) называть частями энергии (евклидовой нормы) изображения, попадающей в соответствующие ПОПЧ вида (4).

Доказано следующее утверждение. Точные значения частей энергий изображения вида (13) определяются соотношением

$$P_{sr}(f) = \text{tr}(A_s \Phi B_r \Phi^T), \quad (14)$$

где символ tr означает след матрицы, а T – транспонирование.

Справедливость этого утверждения доказывается непосредственной подстановкой в определение (13) представления (2).

Наиболее существенное значение этого результата заключается в том, что он позволяет определить подобласти пространственных частот, в которых сосредоточена подавляющая доля энергии изображения (выявление информационных под областей ПЧ).

4. ОПТИМАЛЬНОЕ ВЫДЕЛЕНИЕ СУБПОЛОСНЫХ КОМПОНЕНТ ИЗОБРАЖЕНИЯ ИЗ ЗАДАНЫХ ПОДОБЛАСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Рассмотрим задачу разделения изображения на аддитивные компоненты

$$\Phi = Y + \Phi_0, \quad (15)$$

так, что первая из них $Y = (y_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, M$, $k = 1, 2, \dots, N$, должна иметь трансформанту Фурье

$$F^Y(u, v) = \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{k=1}^N y_{ik} e^{-ju(i-1)} e^{-jv(k-1)}, \quad -\pi \leq u, v < \pi, \quad (16)$$

которая в «идеальном» случае должна удовлетворять условию

$$F^Y(u, v) = F^{\Phi}(u, v), \quad (u, v) \in V_{sr}, \quad (17)$$

$$F^Y(u, v) = 0, \quad (u, v) \notin V_{sr}, \quad (18)$$

где V_{sr} – заданная ПОПЧ вида (4).

Поскольку отрезки конечной длины не могут иметь трансформанты Фурье с финитными областями определения, то удовлетворить условиям (17) и (18) «идеальной» фильтрации в области ПЧ не представляется возможным. Вместе с тем можно предложить вариант оптимального решения сформулированной задачи разделения изображения на аддитивные составляющие (выделение субполосных компонент), когда в некотором смысле наилучшим образом эти условия аппроксимируются. Ясно, что в качестве критерия целесообразно использовать меру погрешностей приближения к идеальному случаю. Очевидно, что такой подход соответствует постановке задачи оптимальной фильтрации изображений в соответствии с выбранной ПОПЧ.

В качестве такого критерия предлагается использовать функционал следующего вида

$$W_{sr}(Y, \gamma) = (1-\gamma) \iint_{(u,v) \in V_{sr}} |F^{\Phi}(u, v) - F^Y(u, v)|^2 dudv / 4\pi^2 + \gamma \iint_{(u,v) \notin V_{sr}} |F^Y(u, v)|^2 dudv / 4\pi^2, \quad (19)$$

где γ определяет весомость соответствующих интегралов, причем предполагается выполнение неравенства

$$0 < \gamma < 1. \quad (20)$$

Естественным принципом оптимизации является следующее вариационное условие

$$W_{sr}(Y, \gamma) = \min, \quad (21)$$

где минимум ищется по всем изображениям размерности $(M \times N)$ в предположении, что параметр γ является постоянной величиной.

Доказано следующее утверждение. При фиксированном значении параметра γ с выполнением условия (20) решением вариационной задачи (21) является изображение, компоненты которого удовлетворяют системе линейных уравнений

$$y_{lp} = \gamma^{-1}(1-2\gamma) \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_{mn} a_{ml}^s b_{pn}^r + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f_{mn} a_{ml}^s b_{pn}^r, \quad (22)$$

$$l=1, \dots, M, p=1, \dots, N.$$

Очевидно, что для решения системы уравнений (22) можно применять итерационные методы. В частности в методе простых итераций начальному приближению вида

$$y_{mn}^0 = 0, \quad m=1, \dots, M, \quad n=1, \dots, N,$$

соответствует следующее приближение

$$y_{lp}^1 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N f_{mn} a_{ml}^s b_{pn}^r, \quad l=1, \dots, M, p=1, \dots, N. \quad (23)$$

Совокупность последних соотношений нетрудно представить в матричной форме

$$Y^1 = A_s \Phi B_r, \quad (24)$$

которая, очевидно, совпадает с (10). Иными словами компонента вида (10) может быть использована в качестве начального приближения.

С другой стороны, при следующем значении параметра

$$\gamma = 0.5, \quad (25)$$

что соответствует выбору в (19) равных весовостей компонент меры погрешности искомой аппроксимации, система уравнений (22) снова преобразуется к виду (23). Следовательно, представление (10) определяет аддитивную частотную компоненту, оптимальную в смысле выполнения вариационного условия (21) при равной важности величины меры отклонения искомой трансформанты Фурье от нуля вне заданной ПОПЧ и её отклонения от трансформанты Фурье исходного изображения в этой ПОПЧ.

Возникает естественный вопрос выбора метода решения системы уравнений (22), матричная запись которой имеет вид

$$\gamma Y + (1-2\gamma) A_s Y B_r = (1-\gamma) A_s \Phi B_r. \quad (26)$$

Если ввести векторы $\bar{w} = (w_1, \dots, w_{M \times N})^T$, $\bar{v} = (v_1, \dots, v_{M \times N})^T$, компоненты которых формируются на основе строк матриц Y и Φ следующим образом

$$w_{(i-1) \times M + k} = y_{ik}, \quad v_{(i-1) \times M + k} = f_{ik}, \quad i=1, \dots, M, k=1, \dots, N, \quad (27)$$

и блочную матрицу

$$C^{sr} = \left\{ C_{ik}^{sr} \right\}, \quad i, k=1, \dots, M, \quad (28)$$

с блоками вида

$$C_{ik}^{sr} = a_{ik}^s B_r, \quad i, k=1, \dots, M,$$

то уравнение (26) можно преобразовать к системе линейных алгебраических уравнений

$$(\mathcal{A} + (1-2\gamma)C^{sr})\bar{w} = (1-\gamma)C^{sr}\bar{v}, \quad I = \text{diag}(1, \dots, 1). \quad (29)$$

Здесь $I = \text{diag}(1, \dots, 1)$ – единичная матрица соответствующей размерности.

Отметим, что введенная матрица C^{sr} является кронекеровским произведением субполосных матриц A_s и B_r , обозначаемым в виде

$$C^{sr} = A_s \otimes B_r.$$

Показано, что матрица в левой части уравнения (29) является неособенной. Поэтому искомое решение имеет вид

$$\bar{w} = (1-\gamma)(\mathcal{A} + (1-2\gamma)C^{sr})^{-1} C^{sr}\bar{v}. \quad (30)$$

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Одним из свойств субполосных компонент вида (10) является отсутствие влияния на данные компоненты энергии исходного изображения из смежных подобластей пространственных частот. Для демонстрации этого свойства были проведены эксперименты по сравнению абсолютных значений трансформант Фурье изображения, вычисленных его субполосных компонент и результатов КИХ-фильтрации. Так, на рис. 2 представлено модельное изображение (модель полосовых помех) размерности 512x512 пикселей и абсолютные значения фрагмента его трансформанты Фурье в области пространственных частот D ,

$$D = \{(x = 0.5\pi) \cap (y \in [0.12\pi, 0.18\pi])\}, \quad (31)$$

вне которой данные значения практически равны нулю.

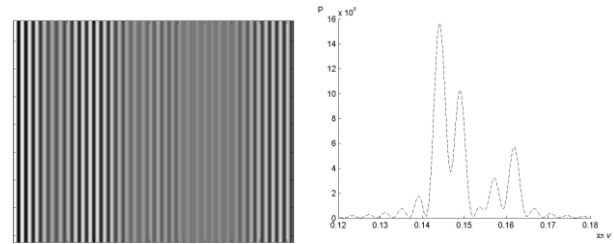


Рис. 2. Модельное изображение и поперечное сечение множества абсолютных значений его трансформанты Фурье
Для выбранного изображения были вычислены субполосные компоненты (10), соответствующие заданным подобластям пространственных частот V_1 и V_2 ,

$$V_1 = \{(x \in [0, \pi]) \cap (y \in [0.14\pi, 0.147\pi])\}, \quad (32)$$

$$V_2 = \{(x \in [0, \pi]) \cap (y \in [0.146\pi, 0.153\pi])\}.$$

Для полученных субполосных компонент были вычислены трансформанты Фурье, поперечное сечение множества абсолютных значений которых, соответствующие области D (31), отображены на рис. 3 с помощью сплошной линии. На рис. 3 пунктирной линией также отображены соответствующие абсолютные значения трансформант Фурье исходного изображения. Подобласти фильтрации V_1 и V_2 (32) на рис. 3а и рис. 3б отмечены вертикальными линиями. На графиках (рис. 3) видно, что спектр субполосных компонент монотонно убывает за границами подобластей фильтрации.

С целью сравнительного анализа были вычислены результаты КИХ-фильтрации [1] исходного изображения в подобластях V_1 и V_2 (длина импульсной характеристики выбранных КИХ-фильтров составляет 512 значений). Поперечное сечение множества абсолютных значений трансформант Фурье выходных последовательностей КИХ-фильтров (значений, соответствующих области D (31)) отображены на рис. 3 с помощью «точечной» линии.

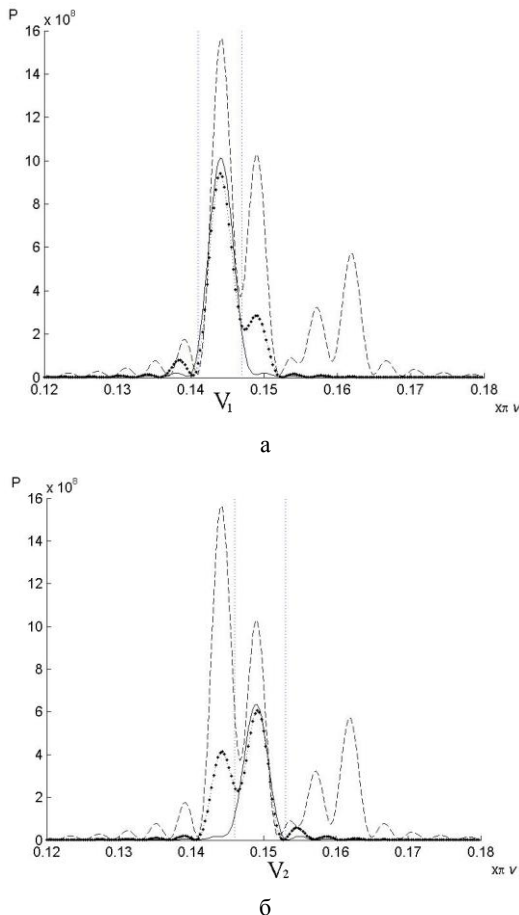


Рис. 3. Абсолютные значения трансформант Фурье в области D при фильтрации в различных подобластях ПЧ :
а – в подобласти V_1 , б – в подобласти V_2

На рис. 3 видно, что на графиках спектра выходной последовательности КИХ-фильтра присутствуют значительные подъемы справа (рис. 3а) и слева (рис. 3б) от подобластей фильтрации V_1 и V_2 , определяемые компонентами исходного изображения, которые соответствуют подъемам на графике спектра исходного изображения в смежных подобластях пространственных частот.

Графики, приведенные на рис. 3, демонстрируют тот факт, что, в отличие от КИХ-фильтрации, на свойства субполосных компонент вида (10) не влияет энергия исходного изображения из смежных подобластей пространственных частот.

6. ВЫВОДЫ

В настоящей работе разработаны методы вычисления точных значений долей энергии изображения в заданных подобластях пространственных частот и оптимального выделения соответствующих этим подобластям субполосных компонент изображения (оптимального в смысле минимального отклонения трансформант Фурье субполосных компонент от трансформанты Фурье исходного изображения в заданной подобласти пространственных частот и минимального отклонения от нуля вне ее), для реализации которых не требуется вычисление трансформант Фурье. Также показано, что выделяемые субполосные компоненты полностью определяются двумерными отрезками трансформант Фурье исходного изображения из заданных подобластей пространственных частот.

7. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, гос. контракт № 14.514.11.4088.

8. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гонсалес, Р. *Цифровая обработка изображений [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2012. – 1104 с.*
- [2] Жилияков, Е.Г. *Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, С.П. Белов, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 10-25.*
- [3] Жилияков, Е.Г. *О наилучшем ортогональном базисе для субполосного анализа и синтеза сигналов / Е.Г. Жилияков, С.П. Белов, С.В. Туяков, Д.В. Урсол // Информационные системы и технологии. – 2011. – № 2. – С. 26-33.*
- [4] Жилияков, Е.Г. *Оценка количества значимых долей энергии изображения, определяемых его проекциями на собственные векторы субполосных матриц [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец // Информационные системы и технологии. – № 3 (71). – 2012. – С. 51-58.*
- [5] *Методы компьютерной обработки изображений [Текст] / Под редакцией В.А. Соифера. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.*

Информация об авторах

Жилияков Евгений Георгиевич, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, д. т. н., профессор, заведующий кафедрой информационно-телекоммуникационных систем и технологий, e-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru
Черноморец Андрей Алексеевич, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, к. т. н., доцент, заведующий кафедрой прикладной информатики, e-mail: chernomorets@bsu.edu.ru