К вопросу трансформации моделей схемы Кэли-Клейна

Графский О.А.
(Дальневосточный государственный университет путей сообщения,
г. Хабаровск, Россия)

При анализе неевклидовых плоскостей схемы Кэли-Клейна [1, 2], установлено, что согласно приведенной пространственной ориентации моделей относительно друг друга, имеют место два закона соответствия (по строкам i – соответствующий типу мероопределения углов и столбцам j – соответствующий типу мероопределения длин) между моделями. При этом в работе [3], средствами компьютерной графики представлены результаты динамики постепенного видоизменения (трансформации) моделей друг в друга. Такая трансформация была обеспечена за счет введения в уравнения моделей коэффициента k_t, значения которого вычислялись по формуле

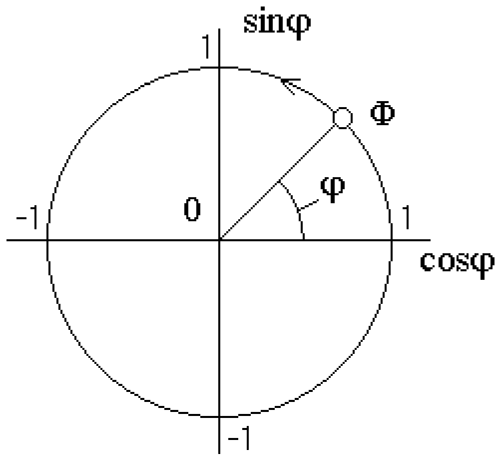

Рис.1. Схема преобразования моделей

Для графической интерпретации при трансформации рассматриваемых моделей предлагается довольно простой геометрический аппарат, в основе которого положена единичная окружность, используемая при изучении основ тригонометрии (рис.1).

Установлено, что любую модель Ф схемы Кэли-Клейна можно записать выражением:

$$k_t = 1 - \frac{t}{T_t}, \qquad (1)$$

где t – время трансформации модели; T – период перехода от одной до другой смежной модели.

При этом установлено, что при трансформации моделей с типом мероопределения длин (МОД) по Риману в модели с типом МОД по Лобачевскому, промежуточными моделями (при t = T_t) являются пара параллельных плоскостей (ППП), которые естественным образом отсутствуют в «плоской» схеме Кэли-Клейна.

$$\cos\varphi_j(y^2\cos\varphi_i + z^2) = r^2 - x^2. \qquad (2)$$

Тогда, в исходном (стартовом) положении ($\varphi_i = 0$ и $\varphi_j = 0$) согласно выражению (2) модель Ф будет иметь форму сферы радиуса *r*.

В таблице 1 показаны трансформации моделей в направлении изменения МОД для каждого *i*-го типа МОУ ($\varphi_i = 0$, $\varphi_i = \pi/2$, $\varphi_i = \pi$).

Таблица 1

Трансформация моделей в направлении изменения типа МОД

$\cos\varphi_j(y^2\cos\varphi_i + z^2) = r^2 - x^2$			
Тип МОУ	$\varphi_j = 0$, $\varphi_j = 2\pi$	$\varphi_j = \pi/2$, $\varphi_j = 3\pi/2$	$\varphi_j = \pi$

Римана ($\varphi_i = 0$)	$\cos\varphi_j(y^2+z^2)=r^2-x^2$		
	$x^2+y^2+z^2=r^2$ (Сф)	$x^2=r^2$ (ППП)	$x^2-y^2-z^2=r^2$ (ДПГ)
Евклида ($\varphi_i = \pi/2$)	$z^2\cos\varphi_j=r^2-x^2$		
	$x^2+z^2=r^2$ (КЦ)	$x^2=r^2$ (ППП)	$x^2-z^2=r^2$ (ГЦ)
Лобачевского ($\varphi_i = \pi$)	$\cos\varphi_j(-y^2+z^2)=r^2-x^2$		
	$x^2-y^2+z^2=r^2$ (ОПГ)	$x^2=r^2$ (ППП)	$x^2+y^2-z^2=r^2$ (ОПГ\`)

В таблице 1 обозначено (сверху вниз): Сф – сфера (модель плоскости эллиптической геометрии Римана); КЦ – круговой цилиндр (модель плоскости антиевклидовой геометрии); ОПГ – однополостный гиперболоид (модель плоскости антигиперболической геометрии); ППП – пара параллельных плоскостей (соответственно модели плоскостей галелеевой, полугалелеевой и псевдогалелеевой геометрий); ДПГ – двуполостный гиперболоид (модель плоскости гиперболической геометрии Лобачевского); ГЦ – гиперболический цилиндр (модель плоскости антипсевдоевклидовой геометрии); ОПГ\` – однополостный гиперболоид (модель плоскости дважды гиперболической геометрии).

Этой же методики трансформации, согласно выражению (2), подчиняются модели при последовательном переходе от типа МОУ по Риману к типу МОУ по Евклиду и далее по Лобачевскому в каждом из типов МОД (табл. 2). В таблице 2 обозначено: Окр – окружность (модель плоскости Евклида); ПП – пара параллельных прямых; РГ – равносторонняя гипербола.

Однако, практически тот же результат (таблицы 1 и 2) можно достичь при использовании не *cos*φ, а просто угла φ (рис.1), точнее коэффициента k_φ , который имеет вид аналогичный выражению (1) при выполнении трансформации моделей во времени:

$$k_\varphi = 1 - \frac{\varphi}{\pi/2}. \qquad (3)$$

В этом случае угол φ изменяется от 0 до π (для сравнения в выражении (1) t изменяется от 0 до $2T_t$), и указанные параметры в выражениях (1) и (3) находятся в следующей зависимости:

$$\frac{\pi}{\varphi} \times \frac{t}{T_t} = 2.$$

Таблица 2

Трансформация моделей в направлении изменения типа МОУ

$\cos\varphi_j(y^2\cos\varphi_i+z^2)=r^2-x^2$

Тип МОУ	Тип МОД		
	Римана	Евклида	Лобачевского
	$\varphi_j = 0$		$\varphi_j = \pi$
	$y^2 \cos\varphi_i + z^2 = r^2 - x^2$	$x = 0;$ $y^2 \cos\varphi_i + z^2 = r^2$	$-y^2 \cos\varphi_i - z^2 = r^2 - x^2$
Римана $\varphi_i = 0$, $\varphi_i = 2\pi$	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (Сф)	$y^2 + z^2 = r^2$ (Окр)	$x^2 - y^2 - z^2 = r^2$ (ДПГ)
Евклида $\varphi_i = \pi/2$, $\varphi_i = 3\pi/2$	$x^2 + z^2 = r^2$ (КЦ)	$z^2 = r^2$ (ПП)	$x^2 - z^2 = r^2$ (ГЦ)
Лобачевского $\varphi_i = \pi$	$x^2 - y^2 + z^2 = r^2$ (ОПГ)	$-y^2 + z^2 = r^2$ (РГ)	$x^2 + y^2 - z^2 = r^2$ (ОПГ`)

На основании выше изложенного и, принимая во внимание тригонометрическую схему (рис.1), построена пространственная схема (рис.2), на которой отображены все модели схемы Кэли-Клейна и промежуточные их стадии – модели в виде пары параллельных плоскостей (ППП).

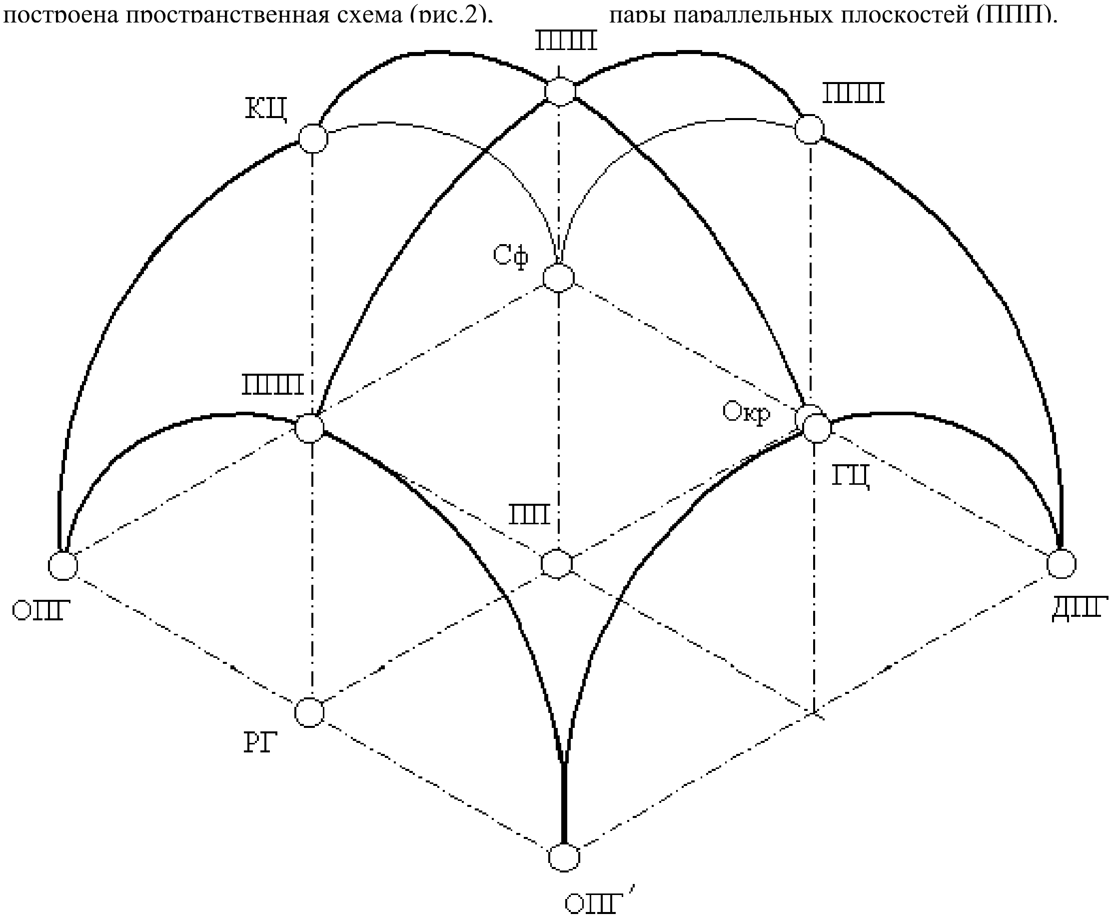

Рис.2. Пространственная схема моделей

Аналогичным способом можно выполнить трансформацию и поверхностей-посредников (табл.3 и табл.4).

Таблица 3

Трансформация посредников в направлении изменения типа МОД

<table>
<tr><td colspan="4">$\cos\varphi_j(y^2\cos\varphi_i + z^2 - r^2) = r^2 - x^2$</td></tr>
<tr><td>Тип МОУ</td><td>$\varphi_j = 0$,
$\varphi_j = 2\pi$</td><td>$\varphi_j = \pi/2$,
$\varphi_j = 3\pi/2$</td><td>$\varphi_j = \pi$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Римана
($\varphi_i = 0$)</td><td colspan="3">$\cos\varphi_j(y^2 + z^2 - r^2) = r^2 - x^2$</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 + z^2 = 2r^2$
(Сф)</td><td>$x^2 = r^2$
(ППП)</td><td>$x^2 = y^2 + z^2$
(КК)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Евклида
($\varphi_i = \pi/2$)</td><td colspan="3">$\cos\varphi_j(z^2 - r^2) = r^2 - x^2$</td></tr>
<tr><td>$x^2 + z^2 = 2r^2$
(КЦ)</td><td>$x^2 = r^2$
(ППП)</td><td>$x^2 = z^2$
(ДПП)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Лобачевского
($\varphi_i = \pi$)</td><td colspan="3">$\cos\varphi_j(-y^2 + z^2) = r^2 - x^2$</td></tr>
<tr><td>$x^2 - y^2 + z^2 = 2r^2$
(ОПГ)</td><td>$x^2 = r^2$
(ППП)</td><td>$x^2 + y^2 = z^2$
(КК`)</td></tr>
</table>

Таблица 4

Трансформация посредников в направлении изменения типа МОУ

<table>
<tr><td colspan="4">$\cos\varphi_j(y^2\cos\varphi_i + z^2 - r^2) = r^2 - x^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Тип МОУ</td><td colspan="3">Тип МОД</td></tr>
<tr><td>Римана</td><td>Евклида</td><td>Лобачевского</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi_j = 0$</td><td>$\varphi_j = \pi$</td></tr>
<tr><td>$y^2\cos\varphi_i + z^2 - r^2 =$
$= r^2 - x^2$</td><td>$x = 0$;
$y^2\cos\varphi_i + z^2 - r^2 =$
$= r^2$</td><td>$-y^2\cos\varphi_i - z^2 - r^2 =$
$= r^2 - x^2$</td></tr>
</table>

Римана $\varphi_i = 0$, $\varphi_i = 2\pi$	$x^2 + y^2 + z^2 = 2r^2$ (Сф)	$y^2 + z^2 = 2r^2$ (Окр)	$x^2 = y^2 + z^2$ (КК)
Евклида $\varphi_i = \pi/2$, $\varphi_i = 3\pi/2$	$x^2 + z^2 = 2r^2$ (КЦ)	$z^2 = 2r^2$ (ПП)	$x^2 = z^2$ (ДПП)
Лобачевского $\varphi_i = \pi$	$x^2 - y^2 + z^2 = 2r^2$ (ОПГ)	$-y^2 + z^2 = 2r^2$ (РГ)	$x^2 + y^2 = z^2$ (КК\`)

При этом, в направлении МОД по Риману необходимо рассматривать величину $2r^2$ (например, у сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2r^2$) в виде $r^2 + r^2$ (т.е. $r_P^2 + r_\Gamma^2$, где r_P – параметр моделей с типом МОД по Риману (например, радиус сферы); r_Γ – параметр моделей с типом МОД по Лобачевскому (например, радиус «сферы» псевдоевклидова пространства гиперболической геометрии Лобачевского). Поэтому, сохраняя правую часть в моделях с типом МОД по Риману как $r^2 - x^2$, общее уравнение поверхностей посредников (в таблицах 3 и 4) имеет следующий вид:

$$\cos\varphi_j(y^2\cos\varphi_i + z^2 - r^2) = r^2 - x^2$$

.

В таблицах 3 и 4 обозначено: КК (КК\`) – круговой конус; ДПП – две пересекающиеся плоскости.

Список литературы

1. Графский О.А. Анализ и построение моделей неевклидовых плоскостей схемы Кэли-Клейна//Прикладная геометрия: Электронный журнал. – М.: МАИ (Технический университет), 1999, - Вып. 1, №1,- 30 с.
2. Графский О.А. Исследование взаимосвязи моделей неевклидовых геиметрий//Актуальные проблемы теории и методики графических дисциплин: Материалы семинара-совещания заведующих кафедр ВУЗов России. – Пенза: Пензен.гос. архит.-строит.академия, 1999,- С.85-87.
3. Графский О.А. Исследование моделей неевклидовых плоскостей схемы Кэли-Клейна//Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика: Международный межвуз.науч.-методич.сб.тр.кафедр графических дисциплин. Вып. 5.- Н.Новгород: Нижегород.гос.архит.-строит.ун-т, 2000, - С.171-175.