

# Образование и структура вихрей Калашникова-Циклаури

А.В.Гудзовский<sup>†</sup>, С.В.Клименко<sup>=</sup>

<sup>†</sup> Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

<sup>=</sup> Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

## Аннотация

Представлены результаты визуального анализа нового явления гидродинамической неустойчивости течения несжимаемой жидкости, экспериментально обнаруженного В.Н.Калашниковым и М.Г.Циклаури [1]. Рассматривается течение в ячейке со скрещенными щелями, в которые жидкость подается через одну пару противостоящих ветвей и отводится через вторую пару ветвей. При малых числах Рейнольдса  $Re$  течение на большей части высоты ячейки плоское. По достижении некоторого критического значения  $Re$  течение становится трехмерным с образованием по высоте ячейки периодической структуры вихрей.

В работе приводятся результаты численного моделирования течения, позволившие исследовать процесс образования вихрей Калашникова-Циклаури (КЦ). Предлагается новый метод визуализации результатов расчетов, который аналогичен экспериментальному методу визуализации подкраской жидкости. Метод основан на представлении краски в виде большого числа маркеров, что позволяет преодолеть ограничения, связанные с сеточной диффузией. Метод дает возможность изучить внутреннюю структуру вихрей, рассчитанных на относительно грубой сетке, используемой при численном моделировании течения.

**Ключевые слова:** вихри Калашникова-Циклаури, многочастичная визуализация, численное моделирование.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее мощных инструментов исследования различных типов гидродинамической неустойчивости является визуализация течения. Блестящие примеры экспериментального изучения наиболее известных типов неустойчивости с образованием вихрей (дорожка Кармана, вихри Куэтта-Тейлора, ячейки Релея-Бенара и пр.) представлены в альбоме ван Дайка [2].

В 1991 г. относительно небольшое число красивых гидродинамических явлений при умеренных числах Рейнольдса пополнилось рядом вихрей, обнаруженным В.Н.Калашниковым и М.Г.Циклаури [1] в ячейке со скрещенными щелями (рис.1). Используя в качестве инструмента анализа течения подкраску потока жидкости, авторы [1] сумели установить основные характерные черты явления. Однако

некоторые существенные детали остались неясными. В их число входит механизм возникновения вихрей КЦ (в работе [1] анализировалось только стационарное течение в ячейке с вихрями) и тонкая структура вихрей.

Исследование этих вопросов в эксперименте по ряду причин затруднено (ячейка со скрещенными щелями в [1] предназначена для изучения реологических свойств растворов полимеров и режим течения с вихрями КЦ является аномальным для нее). Поэтому для дальнейшего исследования явления используются методы численного моделирования течения в ячейке. То обстоятельство, что вихри КЦ возникают при умеренных значениях  $Re$ , позволяет получить картину становления вихрей на расчетных сетках объемом 2-4·10<sup>4</sup> ячеек.

Визуализация вихрей КЦ проводится как в эксперименте [1] путем 'подкрашивания' жидкости, поступающей в ячейку через одну из ветвей. Эта процедура выполняется в настоящей работе двумя способами. В первом из них считается, что имеется скалярное поле концентрации  $C$  красителя, которое рассчитывается решением уравнения конвективного переноса. Далее строится изоповерхность  $C$ , которая считается поверхностью раздела сталкивающихся потоков жидкости. Таким образом наглядно представляется процесс становления ряда вихрей КЦ в ячейке. Однако этот способ не позволяет воспроизвести тонкую структуру вихрей из-за численной диффузии на расчетной сетке (дополнительное измельчение сетки

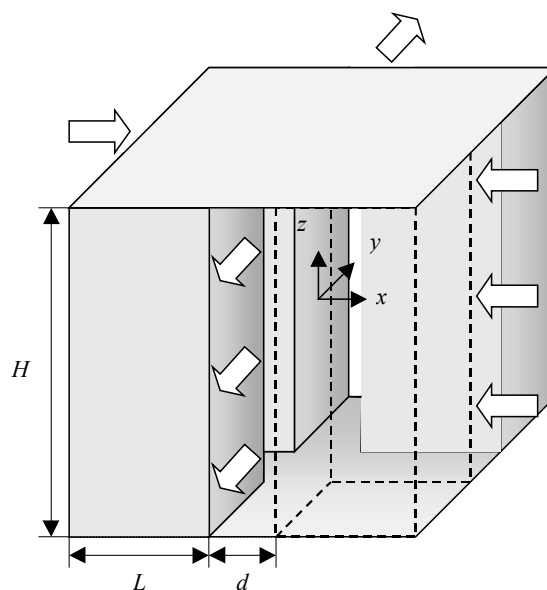


Рис.1. Общий вид ячейки.

ведет к значительному увеличению времени расчета течения, слабо улучшая точность воспроизведения картины течения).

Преодоление этого ограничения возможно при представлении течения красителя в виде потока маркеров, не подверженного диффузионному размыванию. Непосредственное отображение положения большого числа маркеров как совокупности точечных объектов приводит к плотной закрашке картинки, на которой одни маркеры заслоняют другие. Поэтому ранее в работах, посвященных визуализации газообразных объектов (типа дыма, облака, тумана или пламени), применялась определенная модификация многочастичного подхода, в которой маркеры отображались как некоторые полупрозрачные оптические объекты. Так, в работах [3] в нестационарное поле течения выпускалось множество маркеров и каждому маркеру ставился в соответствие объект с определенными оптическими свойствами (коэффициенты поглощения, излучения и рассеяния). Совокупность таких объектов далее отображалось с помощью того или иного метода объемной визуализации. Для достижения хорошей точности прорисовки деталей течения необходимо использовать большое число маркеров. Поэтому в [3] этот метод использовался для передачи общей картины течения, т.е. крупномасштабной структуры типа клубов дыма.

В настоящей работе представлена модификация многочастичного метода без введения протяженных оптических объектов, связанных с маркерами. Применение этого подхода для визуализации стационарного течения позволяет значительно повысить его точность отображения деталей структуры границы раздела жидкостей (чистой и подкрашенной) с прорисовкой деталей, меньших размера ячеек расчетной сетки, на которой моделируется течение.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 кратко описывается рассматриваемое явление вихрей КЦ и его численная модель. Далее, в разделе 3 приводится описание используемых методов визуализации с помощью скалярного поля концентрации красителя и множества маркеров. В разделе 4 анализируется процесс становления ряда вихрей КЦ, а в разделе 5 - структура вихря КЦ.

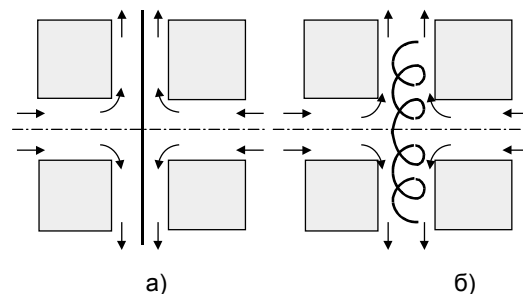
## 2. ФИЗИЧЕСКОЕ ЯВЛЕНИЕ И ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

В ячейке, где возникают вихри (рис.1), между двумя горизонтальными торцевыми пластинами размещены четыре параллелепипеда, так что зазоры между ними образуют каналы равной ширины, пересекающиеся под прямым углом в виде креста. Через пару противоположных ветвей креста поступают равные потоки жидкости, отводимой из ячейки через другую пару ветвей.

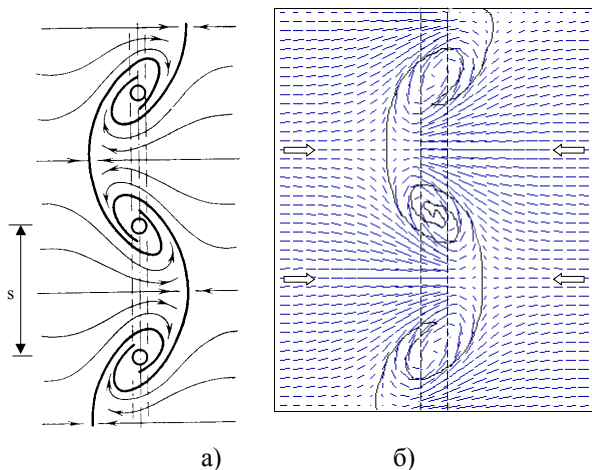
Поместим начало координат в геометрический центр ячейки (рис.1), направим оси  $x$  и  $y$  в горизонтальной плоскости вдоль входных и выходных каналов, а ось  $z$  - вертикально вдоль оси перекрестья. Примем за масштаб длины ширину каналов  $d$ , в качестве характерной скорости - среднюю в канале  $u = q/Hd$  ( $q$  - расход жидкости через одну ветвь), число Рейнольдса определим как  $Re = ud/\nu$ , где  $\nu$  - кинематическая вязкость жидкости. В работе рассмотрено течение в ячейках с  $12 \leq H/d \leq 120$ ,  $L/d=10$  при  $30 \leq Re \leq 100$ .

В [1] основные результаты получены для ячеек с  $H/d=262$ ,  $L/d=75$  и с  $H/d=32$ ,  $L/d=37.5$ , для которых найдено, что критические значения числа Рейнольдса  $Re^*$  равны, соответственно,  $Re^*=55$  и  $42$ . При  $Re < Re^*$  поверхность раздела потоков, поступающих из противостоящих ветвей, совпадает с плоскостью  $x=0$  и течение на большей части высоты ячейки плоское (рис.2а). При  $Re > Re^*$  поверхность раздела потоков перестает быть плоской (рис.2б) из-за формирования в перекрестье стационарного вертикального ряда вихрей с чередующимися направлениями вращения (рис.3а). Оси вихрей горизонтальны и ориентированы по оси  $y$ . Расстояние между осями вихрей  $s$  практически постоянно по высоте ячейки.

Численное моделирование нестационарного течения в ячейке проводится путем решения уравнений Навье Стокса для несжимаемой вязкой жидкости явным конечно-объемным методом, аналогичным проекционному методу MAC, с использованием программного комплекса **FlowVision** [4]. Расчеты проведены в половине ячейки  $y > 0$  - на плоскости  $y=0$  поставлены условия симметрии. Симметрия течения отмечена в эксперименте [1] и подтверждена в проверочных расчетах в полной ячейке. Расчетная область покрывается декартовой сеткой с неравномерным шагом. В области перекрестья каналов ( $|x| \leq d/2$ ,  $y \leq d/2$ ,  $|z| \leq H/2$ ) шаг по осям  $x$  и  $y$  минимален и равен  $0.05d$ , по мере удаления от перекрестья он возрастает до  $d$ . Шаг по оси  $z$



**Рис.2.** Схема течения в горизонтальном сечении ячейки; штрих-пунктир - плоскость симметрии  $y=0$ ; сплошная линия - граница раздела сталкивающихся потоков; а) докритический режим; б) течение с вихрями КЦ



**Рис.3.** Течение в плоскости  $y=0$ , пунктир - сечения выходных ветвей, а – схема течения из [1], б – расчетное поле скорости и “линия раздела” потоков для  $H/d=12$ ,  $Re=66.7$ .

минимален у торцов ячейки  $\Delta z=0.05d$ , возрастая в центральной части до  $\Delta z=0.2d$  (при  $H/d \leq 18$ ) или  $\Delta z=d$ . При моделировании течения в отдельном вихре в горизонтальном слое высотой  $s$  (раздел 5) величина  $\Delta z$  равна  $0.05d$ .

Численное моделирование течения при  $Re > Re^*$  позволяют воспроизвести стационарное течение с вихрями КЦ, подобными наблюдаемым в эксперименте [1]. На рис.3 приведено сравнение полей скорости и границы раздела сталкивающихся потоков, полученные в эксперименте и расчете.

### 3. МЕТОДЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

В работе использовались два способа визуализации границы раздела сталкивающихся потоков в ячейке.

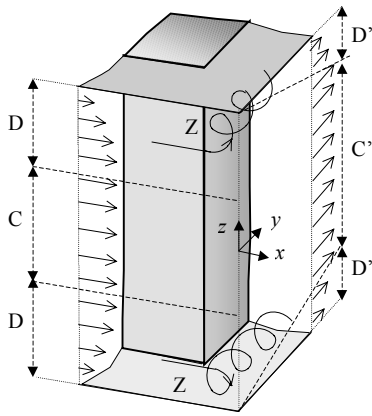
Первый метод используется для визуализации формы границы раздела сталкивающихся потоков. Изображение этой границы строится в плоскости  $y=0$ . В отсутствие вихрей КЦ граница раздела есть прямая, совпадающая с вертикальной осью ячейки (рис.2а). По мере становления ряда вихрей КЦ она заворачивается вихрями в последовательность чередующихся разнонаправленных спиралей (рис.3). Визуализация границы раздела жидкостей, поступающих из противостоящих ветвей, проводится путем решения уравнения конвективного переноса концентрации красителя  $C$ , величина которой на входе в одну ветвь принимается равной единице, а на входе в противостоящую - нулю. В силу малой диффузии красителя в эксперименте величина  $C$  в каждой точке течения равна либо единице, либо нулю. При расчете на сетке с конечным шагом тонкая структура поля концентрации в областях столкновения потоков

размывается и величина  $C$  принимает значения в интервале  $0 < C < 1$ . При этом изоповерхность  $C=0.5$  может трактоваться как граница раздела потоков. Однако для получения представления о форме границы раздела потоков целесообразно отображать не только изоповерхность  $C=0.5$ , но и всю область течения, в которой  $0 < C < 1$ . Поэтому при анализе становления вихрей КЦ строится черно-белое растровое изображение, в котором степень черноты пикселя пропорционально  $|C - 0.5|$ .

Второй метод применяется при построении изображения тонкой структуры вихря КЦ и имитирует экспериментальную визуализацию при введении красителя в поток жидкости. Наложим на область течения мелкую сетку, размер ячеек которой определяется точностью получаемого растрового изображения. Так при построении изображения ячейки, видимой вдоль одной из осей координат, размер ячейки сетки должен быть таков, чтобы ячейка сетки проектируется в пиксель. Краситель предполагается состоящим из большого числа маркеров. Движение маркеров рассчитывается по полю скорости с использованием трилинейной интерполяции скорости по значениям, найденным в гидродинамическом расчете, и метода Рунге-Кутты второго порядка точности для интегрирования уравнения движения маркера. Каждый маркер на пути следования через область стационарного течения моделирует прохождение бесконечно большого числа квазимаркеров, выпущенных из определенной точки. Все эти квазимаркеры повторяют один и тот же путь породившего их маркера, образуя своего рода трек. Каждый пиксель формируемого изображения течения прозрачной жидкости с красителем будет тем темнее, чем выше суммарная концентрация красителя (квазимаркеров) на всем пути луча зрения, пересекающего область течения и проходящего через пиксель. Число квазимаркеров в каждой ячейке сетки пропорционально времени пребывания в ячейке породившего их маркера. Поэтому течение подкрашенной жидкости предлагается моделировать ограниченным числом маркеров и строить изображение исходя из условия, что степень зачернения ячейки, через которую проходит маркер, пропорционально времени его пребывания в ячейке. Получаемое изображение несет в себе черты дискретности (из-за конечного числа красящих маркеров) и непрерывности (из-за трактовки каждого маркера как непрерывного потока квазимаркеров) и аналогично получаемому в эксперименте при использовании красителя.

### 4. СТАНОВЛЕНИЕ РЯДА ВИХРЕЙ КАЛАШНИКОВА-ЦИКЛАУРИ

Рассмотрим предварительно докритический режим ( $Re < Re^*$ ) течения в ячейке с достаточно длинными и высокими ветвями ( $H/d > 5$ ,  $L/d \geq 10$ ). В этом



**Рис.4.** Схема докритического течения в квадранте  $x < 0, y > 0$ .

случае поле скорости в области перекрестья почти не зависит от  $Re$  и размеров ячейки.

При достаточной длине входных ветвей на определенном расстоянии от входа устанавливается течение с распределением продольной скорости  $u^*(y, z, H)$ , даваемым решением задачи об одномерном стационарном течении в канале прямоугольного сечения. В распределении скорости  $u^*(y, z, H)$  для каналов с вытянутым сечением ( $H/d > 5$ ) можно выделить центральную часть  $C$  (рис. 4), в которой профиль близок к параболическому по  $y$  и практически постоянен по высоте  $z$ . К торцам канала примыкают области  $D$  высотой порядка  $1.5d$ , в которых скорость зависит от  $z$ . Высота областей  $D$  и функция  $u^*(y, z, H)$  в  $D$  слабо зависят от  $H$  при  $H/d > 5$ .

В областях  $D$  расход жидкости меньше среднего значения, но в выходных каналах вблизи перекрестья еще не развился профиль скорости с дефицитом расхода у торцов (в областях  $D'$ , рис. 4). Поэтому в сталкивающихся потоках у границы раздела (плоскости  $x=0$ ) возникает компонента скорости, направленная к торцам ячейки. Формируется стационарное вторичное течение в форме четырех слабо закрученных вихрей  $Z$  равной интенсивности (у каждого торца по паре вихрей с разными направлениями вращения) с горизонтальными осями, ориентированными по оси  $y$ . При  $Re < Re^*$  течение устойчиво по отношению к малым возмущениям, которые не приводят к нарушению симметрии относительно плоскости  $x=0$ .

Вихри КЦ возникают при  $Re > Re^*$  в результате развития возмущения торцевых вихрей  $Z$  и нарушения симметрии относительно плоскости  $x=0$ .

В расчетах рассмотрены две моды возмущения –  $M_0$  и  $M_1$ , инициируемые путем кратковременного изменения расхода ( $M_0$ ) или профиля скорости ( $M_1$ ) во входных ветвях ячейки. Для создания моды  $M_0$  расход в одной из них увеличивался, а в другой уменьшался на 5%. Для создания моды  $M_1$  расход в каждой ветви

сохранялся, но в верхней половине ( $z > 0$ ) одной ветви расход увеличивался, а у противостоящей – уменьшался на 5%. Под действием этих возмущений плоскость раздела потоков смещается вдоль оси  $x$  (при  $M_0$ ) или поворачивается вокруг оси  $y$  (при  $M_1$ ). В результате у обоих торцов в одном из вихрей ( $Z^*$ ) вращательное движение становится более интенсивным, чем в соседнем. При  $M_0$  у торцов усиливаются вихри с разным направлением вращения, а при  $M_1$  – с одинаковым. При  $Re < Re^*$  после снятия возмущения несимметрия вихрей у торцов со временем исчезает.

Становления ряда вихрей КЦ при  $Re > Re^*$  в виде последовательности из 12 кадров через равные промежутки времени представлено на рис.5. На кадре изображена граница раздела сталкивающихся потоков жидкости в окрестности перекрестья ячейки. Положение параллелепипедов в ячейке обозначено толстыми горизонтальными отрезками на верхней и нижней границах кадра. Выходные каналы показаны как светлые зазоры между этими толстыми отрезками.

Вначале процесса интенсивность вращения в вихрях  $Z^*$  возрастает и они перемещаются от торцов к центру ячейки, формируя первую пару. По мере их отхода у торцов формируется вторая пара вихрей с противоположным направлением вращения. Следующая пара вихрей у торцов не возникает. Последующее заполнение высоты перекрестья вихрями происходит путем индуцирования новых вихрей головными вихрями цепочек, растущих от каждого торца по направлению к центру ячейки. При развитии моды  $M_1$  (рис.5а) вихри, идущие впереди цепочек, имеют одинаковые направления вращения и при сближении в центре ячейки сливаются в один вихрь. Таким образом, в результате развития моды  $M_0$  (рис. 5б) образуется ряд вихрей с четным числом вихрей  $N$ , а при развитии моды  $M_1$  – с нечетным  $N$ .

В становлении ряда вихрей КЦ можно выделить два этапа. На первом (кадры 1-5 рис. 5) происходит заполнение высоты ячейки относительно слабыми вихрями, а на втором (кадры 6-12) – усиление вихрей. Обращает на себя внимание тот факт, что вторая из образовавшихся у торцов пар вихрей может на этапе усиления вихрей быть подавлена (рис. 5а), либо развиваться наравне с остальными вихрями (рис. 5б).

## 5. СТРУКТУРА ВИХРЯ КАЛАШНИКОВА-ЦИКЛАУРИ

В развитом течении вихри КЦ располагаются по высоте ячейки практически эквидистантно. Это позволяет проводить изучение тонкой структуры вихря КЦ, ограничиваясь подобластью течения, приходящейся на один период с одним вихрем, расположенным в центре подобласти. При расчете поля скорости на горизонтальных границах подобласти ставятся условия симметрии течения. Уменьшение размеров расчетной области позволяет использовать

более мелкую расчетную сетку и повысить точность расчета скорости.

На рис. 6 приведено изображение вихря, при взгляде на ячейку вдоль оси  $x$ . Изображение построено с помощью потока маркеров, которые видимы в узкой слое ячейки  $|y| < 0.01d$ . Такого рода визуализация является аналогом экспериментального метода 'светового ножа'. Маркеры выпущены в противостоящих ветвях ячейки из точек на вертикальных прямых, близких к плоскости  $y=0$ .

Отчетливо видно чередование черных и белых полос во внешней части вихря и в рециркуляционном течении в ядре вихря, которые разделены белой полосой. Подчеркнем, что размер ячеек сетки, используемой для расчета течения значительно превышает толщину линий спирального течения, разрешенных на рис. 6. Такое подсеточное разрешение возможно в силу гладкости поля скорости и малости численной диффузии при построении изображения с помощью маркеров.

В работе [1] приведена изображенная на рис. 7а фотография течения в ячейке, визуализированного струйкой подкрашенной жидкости (без указания параметров течения, для которого получена фотография). Струйка подкрашенной жидкости выпускалась через иглу на входе в одну из ветвей ячейки на высоте расположения одного из вихрей. Область течения в перекрестье освещалась вдоль оси  $z$  ячейки. Кроме того, в работе [1] приводится схема течения во внутренней части вихря, выявленная по результатам многочисленных тестирования течения струйкой подкрашенной жидкости, выпускаемой из разных положений. Обнаружено, что внутренняя часть вихря представляет собой веретенообразную область с закрученным рециркуляционным течением.

Для получения картины, аналогичной увиденной в эксперименте, в расчетную область выпускаются маркеры. Источниками маркеров служат точки, расположенные равномерно с шагом  $0.005d$  по всему поперечному сечению одного из входных каналов. Движение маркеров рассчитывается на равномерной пространственной сетке с шагом  $0.005d$ . По результатам расчета треков строится растровое изображение течения методом, описанным в разделе 3.

Сравнение фотографии, полученной в эксперименте, и изображения рассчитанного течения представлено на рис. 7. На обеих частях рис. 7 видна 'луковичная' структура течения в части вихря, расположенной в перекрестье ячейки. Кроме того, видна веретенообразная заостряющаяся вниз по течению форма части вихря, расположенной в выходном канале.

Представляет интерес построение более четкого изображения границы вихря, т.е. поверхности, разделяющей потоки, которые поступают через разные

подводящие каналы. Заметим, что поверхность раздела потоков формируется частичками жидкости, движущимися в подводящих каналах в непосредственной близости к плоскости симметрии  $y=0$ . Поэтому для визуализации поверхности раздела маркеры выпускаются из точек, расположенных по всей высоте ячейки на линии, проходящей на малом расстоянии от плоскости  $y=0$ . Примеры получаемых в этом случае изображений при виде вдоль осей  $z$  и  $x$  приведены на рис. 8. Наглядно видна веретенообразная часть вихря, а также его 'луковичное' обрамление в перекрестье ячейки. Кроме того видно, что в течении ниже критической точки, расположенной на острой вершине веретена, вихрь, вращающийся вокруг веретена, разделяется на две слабые вихревых жгута, разнесенных по высоте ячейки.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено течение с вихрями Калашникова-Циклаури, исследуются процесс становления ряда вихрей и их тонкая структура. Предложенный в работе метод построения изображения позволяет исследовать тонкую структуру вихрей КЦ. Метод является численным аналогом широко используемого экспериментального метода визуализации путем подкраски жидкости и дает изображения, близкие к получаемым в эксперименте.

Представляет интерес дальнейшее исследование вихрей КЦ в направлении изучения структуры течения в веретенообразной части вихря и в области течения, следующей за ним. Также дальнейшего исследования требует процесс формирования тонкой структуры отдельного вихря на этапах становления цепочки вихрей и их усиления.

Работа частично поддержана РФФИ, грант № 99-01-00149.

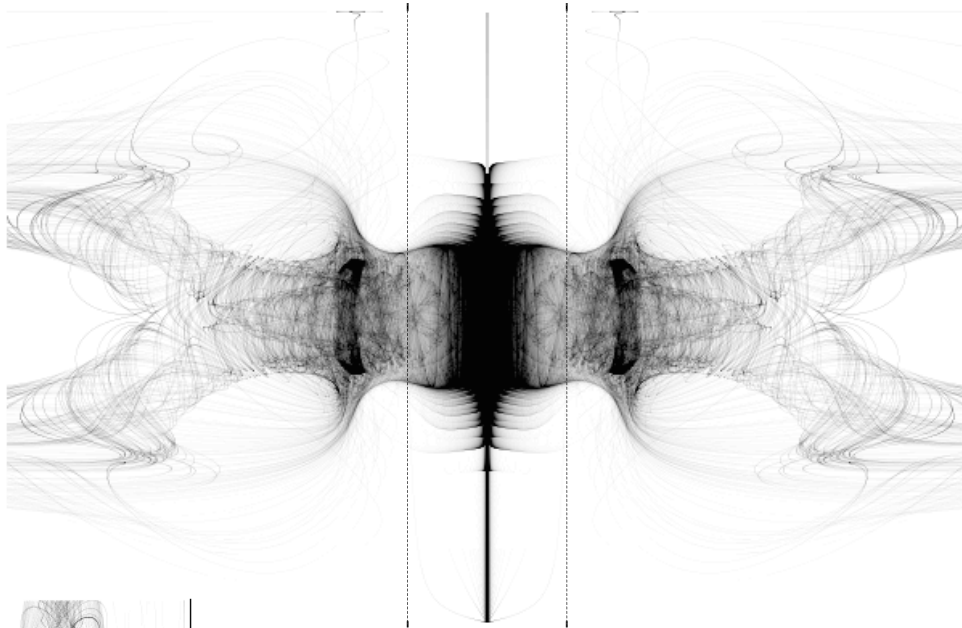
## 7. ЛИТЕРАТУРА

[1] Калашников В.Н., Циклаури М.Г. Упорядоченные трехмерные структуры, возникающие в результате неустойчивости плоского потока в скрещенных щелях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С.3-8; Kalashnikov V.N., Tsiklauri M.G. Effect of polymer additives on ordered three-dimensional structures arising in cross-slot flow // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1993. V.48. P. 215-223.

[2] М. ван Дайк Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир. 1986.

[3] Foster N., Metaxas D. Modeling the motion of a hot, turbulent gas. SIGGRAPH'97, Proceeding of the 1997 ACM SIGGRAPH, pp. 181-188.

[4] Аксенов А.А., Гудзовский А.В. Численное моделирование турбулентного теплового факела в стратифицированной среде. // Свободная конвекция: Тр. Первой Рос. нац. конф. по теплообмену, М.: Изд-во МЭИ. 1994. Т.2. С. 11-16.



**Рис. 8.** Изображения вихря КЦ, виды вдоль оси  $z$  (слева) и вдоль оси  $x$  (вверху); пунктир - сечения входных ветвей ячейки.

### Автор(ы):

Алексей Гудзовский, зав. сектором Института автоматизации проектирования РАН.

Адрес: 123056, Москва, 2-я Брестская, 19/18

Телефон: (095) 251-84-13

E-mail: flowvision@glas.apc.org

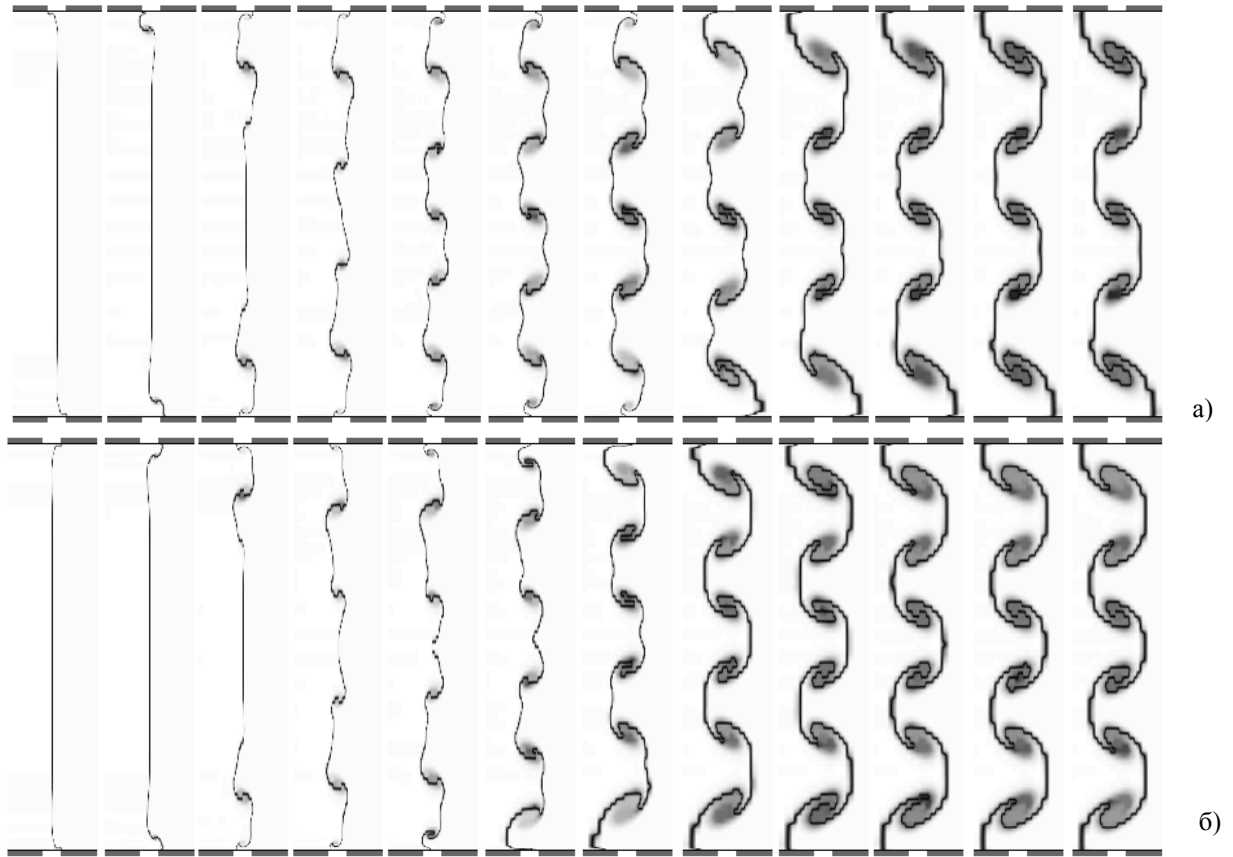
Станислав Клименко, нач. лаборатории Института физики высоких энергий.

E-mail: klimenko@mx.ihep.su

Alexey Gudzovsky, Stanislav Klimenko

### ARISING AND STRUCTURE OF KALASHNIKOV-TSIKLAURI VORTICIES

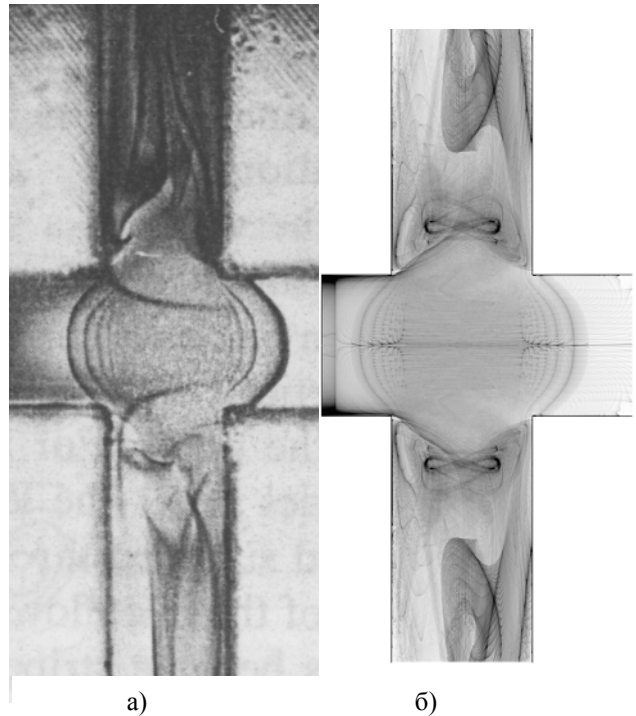
The paper presents a visual analysis of new phenomenon of hydrodynamic instability has been experimentally discovered by V.N.Kalashnikov and M.G.Tsiklauri. The flow considered takes place in a cross-slot cell. A fluid inlets through one pair of opposite branches and leaves the cell through another one. The flow is planar and stable at small Reynolds number  $Re$ . If  $Re$  exceeds a certain critical value the flow becomes three dimensional with a steady spatial ordered vortex structure. We study Kalashnikov-Tsiklauri vortices by numerical simulation. The visualization of numerical results offers a clear view of arising and complex structure of the vortices. We develop visualization technique for rendering the fine structure of vortex. This technique gives the image similar to ones obtained experimentally by dye method.



**Рис.5.** Кадры изменения формы границы раздела сталкивающихся потоков при становлении вихрей КЦ; ячейка с  $H/d=24$ ,  $Re=66.7$ , а) мода возмущения  $M_0$ , б) мода возмущения  $M_1$ .



**Рис. 6.** Изображение вихря КЦ, построенное методом 'светового ножа', вид вдоль оси  $x$ .



**Рис. 7.** Сравнение изображений вихрей КЦ, полученных в эксперименте [1] (а) и в расчете (б), вид вдоль оси  $z$ .