

Алгоритм реализации теоретико–множественных операций *

Виктор Дебелов, Александр Мацокин

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Новосибирск, Россия

Аннотация

В предлагаемой работе детально излагается алгоритм реализации теоретико–множественных операций над областями с кусочно гладкими границами, участки которых заданы параметрически кубическими полиномами. Каждый участок границы является выпуклой и монотонной функцией.

Алгоритм основан на разбиении плоскости на области общей совокупностью граничных кривых двух объектов – операндов теоретико–множественных операций, из которых и составляется результирующее множество.

Основными вычислительными операциями являются решение кубического уравнения по формуле Кардано и вычисление точек пересечения параметрических кривых методом Ньютона.

Ключевые слова: область, контур, характеристическая функция, разбиение плоскости, регуляризованные теоретико–множественные операции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое обоснование алгоритма реализации регуляризованных теоретико–множественных операций [1] над областями с кусочно гладкими границами было дано в статьях [2, 3], которые во многом повторяют аналогичные утверждения более ранней работы [4].

Здесь мы ограничиваемся случаем, когда границы областей составлены из конечной длины кривых, заданных параметрически $(x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – кубические полиномы. Это ограничение связано прежде всего с простотой определения точек пересечения кривой с произвольной прямой, что, как очевидно, сводится к решению кубического уравнения, например, по формуле Кардано.

Заметим, что каждая кривая может быть разбита не более, чем на семь дуг точками $(x(t_i), y(t_i))$, где $t_i \in [0, 1]$ определяются из решения квадратных уравнений

$$\begin{aligned}x'(t) &= 0, & y'(t) &= 0, \\x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t) &= 0.\end{aligned}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96–01–01758).

Каждая такая дуга описывается монотонной и выпуклой функцией относительно осей декартовой системы координат.

Так как в описываем ниже алгоритме основной вычислительной операцией является определение точек пересечения двух монотонных и выпуклых дуг методом Ньютона [3], то будем считать, что границы областей заданы конечным числом таких дуг.

Граница $\partial\Omega$ односвязной области Ω – замкнутая кривая c (контур), состоящая из попарно различных дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ($n = n(c)$ – количество дуг), конец каждой из которых совпадает с началом следующей за ней дуги, причем дуги контура могут иметь общими только концевые точки. Односвязная область однозначно определяется своим контуром и признаком ограниченности области $\omega = (\infty \in \Omega)$.

Так как многосвязная область Ω представима в виде пересечения односвязных областей $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n(\Omega)}$, то она однозначно определяется набором их представлений $\langle c_i = c(\Omega_i), \omega_i \rangle$ и признаком своей ограниченности $\omega = (\infty \in \Omega)$:

$$B(\Omega) = \langle \{c_i, \omega_i\}_{i=1}^{n(\Omega)}, \omega \rangle.$$

Регуляризованные теоретико–множественные операции \cup^* , \cap^* и \setminus^* :

$$\begin{aligned}A \cup^* B &= (\overline{A \cup B})^\circ, & A \cap^* B &= (\overline{A \cap B})^\circ, \\A \setminus^* B &= (\overline{A \setminus B})^\circ,\end{aligned}$$

замкнуты в классе объектов, состоящем из R^2 , $\{\emptyset\}$ и наборов конечного числа попарно непересекающихся областей, границы которых не имеют общих дуг [3].

Изложение алгоритма реализации теоретико–множественных операций над такими объектами мы предварим процедурой построения характеристической функции односвязной области по ее граничному представлению.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Ниже излагаемый алгоритм построения характеристической функции $\chi(P)$ области Ω состоит из построения отрезка $[P, P_\partial]$, не имеющего общих точек с ее границей, кроме $P_\partial \in \partial\Omega$, и вычисления косинуса угла между векторами внутренней нормали в точке P_∂ и $P - P_\partial$.

Очевидно, что $\chi(P) = 1$, если скалярное произведение $(\vec{n}, P - P_\partial)$ положительно. Точка P мо-

жет лежать на касательной: $(\vec{n}, P - P_\partial) = 0$, если $(\vec{n}, \gamma(1) - P_\partial) < 0$. В противном случае $\chi(P) = 0$.

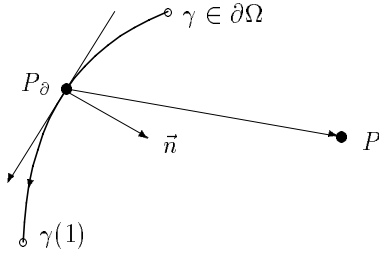


Рис. 1.

Пусть

$$B(\Omega) = \langle c = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \omega \rangle$$

– граничное представление односвязной непустой области Ω , где каждая дуга $\gamma \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ задана параметрически: $\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$, $t \in [0, 1]$:

$$\gamma_x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

$$\gamma_y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3,$$

или:

$$\gamma_x(t) = (1-t)^3 x_0 + 3t(1-t)^2 x_1 + 3t^2(1-t)x_2 + t^3 x_3,$$

$$\gamma_y(t) = (1-t)^3 y_0 + 3t(1-t)^2 y_1 + 3t^2(1-t)y_2 + t^3 y_3.$$

Второе представление дуги (форма Безье) более информативно: (x_0, y_0) – начальная, (x_3, y_3) – конечная точки дуги, а все точки дуги принадлежат выпуклой линейной оболочке точек (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) .

Поиск подходящей точки $P_\partial \in \partial\Omega$ начинается с выбора пробной точки, например, $P_\partial = \gamma_1(0.5)$.

Затем в цикле по всем дугам контура c проверяется пересечение отрезка $[P, P_\partial]$ с очередной дугой $\gamma(t)$. Для этого находим вещественные корни из интервала $[0, 1]$ кубического уравнения

$$\frac{\gamma_x(t) - (P_\partial)_x}{P_y - (P_\partial)_y} - \frac{\gamma_y(t) - (P_\partial)_y}{P_x - (P_\partial)_x} = 0.$$

Если корни $\{t_i\}$ существуют (их может быть не более двух, так как дуга выпукла), то переопределяем пробную точку P_∂ на ближайшую к точке P из точек P_∂ , $\{\gamma(t_i)\}$ и сохраняем номер дуги, которой эта переопределенная пробная точка принадлежит, и значение t_∂ : $P_\partial = \gamma(t_\partial)$.

Замечание 2.1. Для уменьшения объема вычислений рекомендуется установить пересекает ли отрезок $[P, P_\partial]$ выпуклую линейную оболочку точек (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) , содержащую дугу $\gamma(t)$. Во многих случаях отрезок будет лежать вне оболочек контрольных точек дуг и, стало быть, не нужно будет решать кубические уравнения.

Найденная точка P_∂ чаще всего будет внутренней точкой дуги: $t_\partial \in (0, 1)$, но может совпадать с ее концевой точкой: $t_\partial = 0 \vee t_\partial = 1$.

Случай $t_\partial \in (0, 1)$.

В этом случае определена касательная к границе области в точке $P_\partial = \gamma(t_\partial)$ и вектор нормали вычисляется по формуле

$$\vec{n} = (-\gamma'_y(t_\partial), \gamma'_x(t_\partial)) / \sqrt{|\gamma'_x(t_\partial)|^2 + |\gamma'_y(t_\partial)|^2}.$$

Нормаль будет внутренней, если при движении по контуру область остается слева, что во всех наших алгоритмах предполагается.

Тогда имеет место тождество

$$(P \in \Omega) \equiv \{[(\vec{n}, P - P_\partial) > 0] \vee$$

$$[(\vec{n}, P - P_\partial) = 0 \wedge (\vec{n}, \gamma(1) - P_\partial) < 0]\},$$

что и определяет характеристическую функцию области.

Случай $t_\partial = 0 \vee t_\partial = 1$.

В этом случае касательная к границе области в точке $P_\partial = \gamma(t_\partial)$ и вектор нормали могут не существовать. Известно, что для каждой дуги γ контура c , входящей в эту точку, следующая дуга β контура выходит из нее и эта пара дуг выделяет в малой прямоугольной окрестности общей вершины сектор, лежащий в области Ω . Часть границы окрестности, соединяющая точку пересечения с ней второй дуги с точкой пересечения границы с первой дугой против часовой стрелки, лежит в области Ω . На рис.2 выделен вышеупомянутый сектор.

$\chi(P) = 1$, если отрезок $[P_\partial, P]$ пересекает выделенную часть границы окрестности.

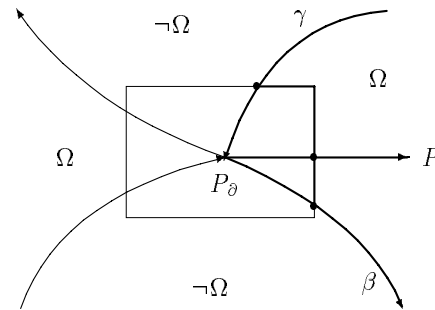


Рис. 2.

Следовательно, для определения принадлежности точки P области Ω в этом случае достаточно в цикле по всем дугам γ контура c таким, что $\gamma(1) = P_\partial$, обозначив через β очередную дугу контура, выполнить следующие действия.

- Определить окрестность вершины P_∂ , вписав квадрат S в окружность с центром в точке P_∂ радиуса

$$r = \min\{|\gamma(0) - P_\partial|, |\beta(1) - P_\partial|, |P - P_\partial|\} / 2.$$

- Вычислить точки пересечения S_γ дуги γ и S_β дуги β с границей квадрата S .
- Определить часть границы S (набор отрезков), соединяющую точки S_β и S_γ с обходом вокруг центра P_∂ против часовой стрелки.
- Проверить существование точки пересечения отрезка $[P_\partial, P]$ с выделенной частью границы квадрата S .

Если такая точка существует, то прервать цикл по дугам, так как $\chi(P) = 1$.

Если такой точки не существует, то продолжить цикл по дугам.

Если точка P не принадлежит ни одному из рассмотренных в цикле секторов, то $\chi(P) = 0$.

Замечание 2.2. Дуги γ , β и отрезок $[P_\partial, P]$ можно заменить на лучи

$$L_\gamma = \{P_\partial + t \cdot \vec{k}_\gamma \mid \forall t > 0\}, \quad L_\beta = \{P_\partial + t \cdot \vec{k}_\beta \mid \forall t > 0\}, \\ L_P = \{P_\partial + t \cdot (P - P_\partial) \mid \forall t > 0\},$$

где вектор \vec{k}_γ – обратный к направляющему вектору касательной к дуге γ ,

\vec{k}_β – направляющий вектор касательной к дуге β в точке P_∂ .

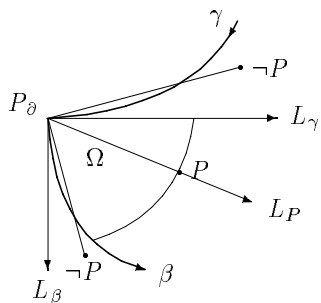


Рис. 3.

Отметим, что отрезок $(P_\partial, P]$ (см. рис.3) не может лежать в секторах, образованных дугой γ и лучом L_γ , и дугой β и лучом L_β , так как он не имеет пересечений с этими дугами. Принадлежность отрезка $[P_\partial, P]$ сектору, образованному дугами γ и β , определяется предикатом

$$\text{true} \equiv \{ [(\vec{n}_\gamma, P - P_\partial) > 0] \vee [(\vec{n}_\gamma, P - P_\partial) = 0 \wedge \\ (\vec{n}_\gamma, \gamma(0) - P_\partial) < 0] \} \\ \wedge \{ [(\vec{n}_\beta, P - P_\partial) > 0] \vee [(\vec{n}_\beta, P - P_\partial) = 0 \wedge \\ (\vec{n}_\beta, \beta(1) - P_\partial) < 0] \},$$

что фактически совпадает с анализом в случае $t_\partial \in (0, 1)$ и не требует решения уравнений.

Замечание 2.3. Описанный алгоритм вычисления характеристической функции применим как для многосвязных областей, так и для определенного во введении класса объектов. Но поскольку граничное представление многосвязной области Ω определяет ее

в виде пересечения односвязных областей $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n(\Omega)}$, то $\chi_\Omega(P) = \chi_{\Omega_1}(P) \cdot \dots \cdot \chi_{\Omega_{n(\Omega)}}(P)$. Следовательно, $\chi_\Omega(P) = 0$, если точка P не принадлежит одной из областей: $\chi_{\Omega_i}(P) = 0$, и в этом случае время работы алгоритма сокращается.

Объект A состоит из объединения непересекающихся односвязных или многосвязных областей $\{\Omega^i\}_{i=1}^{n(A)}$, его характеристическая функция равна логической сумме характеристических функций областей Ω^i . Следовательно, $\chi_A(P) = 1$, если точка P принадлежит одной из областей: $\chi_{\Omega^i}(P) = 1$, и в этом случае время работы алгоритма сокращается.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОПЕРАЦИЙ

Пусть на плоскости R^2 заданы объекты

$$A = \bigcup_{i=1}^{n(A)} \Omega_i^{(A)}, \quad B = \bigcup_{j=1}^{n(B)} \Omega_j^{(B)},$$

состоящие из конечного числа попарно непересекающихся односвязных или многосвязных областей, контурные граничные представления которых известны:

$$B(\Omega_i^{(A)}) = \langle \{c_k^{(A,i)}, \omega_k^{(A,i)}\}_{k=1}^{n(A,i)}, \omega_i^{(A)} \rangle, \\ c_k^{(A,i)} = \langle \gamma_1^{(A,i,k)}, \dots, \gamma_{n(A,i,k)}^{(A,i,k)} \rangle, \\ i = 1, \dots, n(A), \\ B(\Omega_j^{(B)}) = \langle \{c_l^{(B,j)}, \omega_l^{(B,j)}\}_{l=1}^{n(B,j)}, \omega_j^{(B)} \rangle, \\ c_l^{(B,j)} = \langle \gamma_1^{(B,j,l)}, \dots, \gamma_{n(B,j,l)}^{(B,j,l)} \rangle, \\ j = 1, \dots, n(B). \quad (1)$$

Замыкание результата любой из регуляризованных теоретико-множественных операций:

$$C = A \cup^* B, \quad C = A \cap^* B, \quad C = A \setminus^* B,$$

совпадает с объединением замыканий некоторого набора областей разбиения плоскости объединением границ объектов A и B [3].

3.1 Объединение границ объектов

На этом этапе реализации алгоритма регуляризованной теоретико-множественной операции дуги контуров объектов A и B делятся на части точками их попарного пересечения и строится граф из полученных дуг. Так как любые две дуги границы одного из объектов могут иметь общими только концевые точки, то для этого достаточно вычислить точки пересечения дуг границы одного объекта дугами границы второго объекта. Очевидно, что при этом количество контуров не изменится, а число дуг в контурах может увеличиться.

Обозначим через $V^{(A,B)} = \{V_i^{(A,B)}\}_{i=1}^{n(V,A,B)}$ – общее множество попарно различных концевых точек дуг из граничных представлений объектов A и B . Каждой вершине поставим в соответствие набор характеристик:

$n(V_i^{(A,B)})$ – количество дуг, концевой точкой которых эта вершина является, и для каждой такой дуги определим “ее адрес”:

$A \vee B$ – из границы какого объекта дуга,
 $n(\Omega)$ – номер области, которому она принадлежит,
 $n(c)$ – номер контура, которому она принадлежит,
 $n(\gamma)$ – номер дуги в контуре.

Граничные представления (1) дополним информацией по каждой дуге:

$n(\gamma(0))$ – номер начальной точки дуги,
 $n(\gamma(1))$ – номер конечной точки дуги.

Организуем цикл по всем контурам объекта A . Внутри его организуем цикл по всем дугам очередного контура $c_k^{(A,i)}$ с учетом того, что количество дуг $n(A, i, k)$ может увеличиться. Очередную дугу $\gamma = \gamma_q^{(A,i,k)}$ попытаемся разделить на части точками пересечения с границей объекта B .

Для этого организуем цикл по всем контурам объекта B . Внутри его организуем цикл по всем дугам очередного контура $c_l^{(B,j)}$ с учетом того, что количество дуг $n(B, j, l)$ может увеличиться. Пусть $\beta = \gamma_p^{(B,j,l)}$ – очередная дуга контура $c_l^{(B,j)}$.

Найдем точки пересечения дуг γ и β :

$$\gamma_x(t) = \beta_x(u), \quad \gamma_y(t) = \beta_y(u)$$

или

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a'_0 + a'_1 u + a'_2 u^2 + a'_3 u^3,$$

$$b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 = b'_0 + b'_1 u + b'_2 u^2 + b'_3 u^3.$$

Согласно теории исключения при заданном параметре u эта система имеет решение в том и только том случае, если ее результат равен нулю. При $a_3 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$, вводя обозначения

$$\tilde{a}(u) = a_0 - (a'_0 + a'_1 u + a'_2 u^2 + a'_3 u^3),$$

$$\tilde{b}(u) = b_0 - (b'_0 + b'_1 u + b'_2 u^2 + b'_3 u^3).$$

получаем уравнение

$$\det \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & \tilde{a}(u) & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \tilde{a}(u) & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \tilde{a}(u) \\ b_3 & b_2 & b_1 & \tilde{b}(u) & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & \tilde{b}(u) & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & \tilde{b}(u) \end{bmatrix} = 0, \quad (2)$$

Левая часть уравнения (2) является полиномом девятой степени, вещественные корни $\{u_m\}$ которого можно вычислить, например, методом парабол [5]. Затем определить соответствующие вещественные значения $\{t_m\}$, решив кубические уравнения

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \beta_x(u_m) = 0$$

по формуле Кардано. И, наконец, выделить множество пар $\{t_m \in [0, 1], u_m \in [0, 1]\}$.

Но мы рекомендуем для определения точек пересечения монотонных и выпуклых дуг γ и β использовать модификацию метода Ньютона, изложенную в работе [3]. Во-первых, она не использует комплексной арифметики (метод парабол использует), во-вторых, не определяет лишних точек пересечения, лежащих на продолжениях дуг.

Замечание 3.1. Дуги γ и β могут лежать на общей алгебраической кривой (уравнение (2) выполняется при любом значении параметра u). В этом случае полагаем $u_1 = 0, u_2 = 1$ и определяем $t_i \in R$: $\gamma_x(t_i) = \beta_x(u_i), i = 1, 2; t_3 = 0, t_4 = 1$ и определяем $u_i \in R$: $\beta_x(u_i) = \gamma_x(t_i), i = 3, 4$. А затем из них выделяем множество пар $\{t_m \in [0, 1], u_m \in [0, 1]\}$.

Если точки пересечения дуг $\gamma = \gamma_q^{(A,i,k)}$ и $\beta = \gamma_p^{(B,j,l)}$ существуют и мы их нашли:

$$\gamma(t_m) = \beta(u_m), \quad t_m, u_m \in [0, 1], \quad m = 1, \dots, n(\gamma, \beta),$$

то выполняем следующие действия.

- Множество вершин $V^{(A,B)}$ пополняем узлами $0.5 \cdot [\gamma(t_m) + \beta(u_m)]$, если $t_m, u_m \in (0, 1)$.
- Дугу $\gamma_q^{(A,i,k)}$ контура $c_k^{(A,i)}$ заменяем на поддуги, полученные в результате ее разбиения точками $\{t_m \in (0, 1)\}$, и вносим соответствующие изменения в массивы характеристик вершин $V^{(A,B)}$ и дуг контура $c_k^{(A,i)}$.
- Дугу $\gamma_p^{(B,j,l)}$ контура $c_l^{(B,j)}$ заменяем на поддуги, полученные в результате ее разбиения точками $\{u_m \in (0, 1)\}$, и вносим соответствующие изменения в массивы характеристик вершин $V^{(A,B)}$ и дуг контура $c_l^{(B,j)}$.

Замечание 3.2. Точка пересечения дуг вычисляется приближенно, т.е. $\gamma(t_m) \approx \beta(u_m)$, следовательно ее замена на полусумму приближений немного изменяет границы объектов.

3.2 Разбиение плоскости

Обозначим через γ , множество попарно различных модифицированных граничных дуг объектов A и B с указанием номеров их начальных и конечных точек как элементов массива вершин $V = V^{(A,B)}$, для каждой вершины которого известны номера дуг из γ , концевой точкой которых эта вершина является. Кроме того, будем считать, что все дуги с концевой точкой $v \in V$ циклически упорядочены в соответствии с обходом границы окрестности (точек ее пересечения с дугами) вершины по часовой стрелке (см. рис.4).

Планарный граф $G = (V, E)$ разделяет плоскость на конечное число непересекающихся связных областей $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n(G)}$, одна и только одна из которых неограничена, а каждая дуга является частью границ двух и только двух областей.

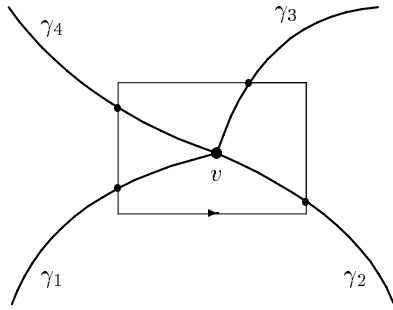


Рис. 4.

Известно [3], что связный граф разбивает плоскость на односвязные области. Пусть $\{G_t = (V_t, E_t)\}_{t=1}^{n(G)}$ – все максимальные связные подграфы графа G . Построим разбиения плоскости $\{\Omega_i^{(t)}\}_{i=1}^{n(G)}$ наборами дуг $c_i^{(t)}$, $t = 1, \dots, n(G)$.

Для этого каждой вершине из V поставим в соответствие номер подграфа, которому она принадлежит, с начальным нулевым значением. Каждой дуге из E , поставим в соответствие номера двух контуров: $c_i^{(t)}$, $c_j^{(t)}$, ограничивающих две области разбиения плоскости: $\Omega_i^{(t)}$, $\Omega_j^{(t)}$, и признаки ± 1 , показывающие с каким направлением дуга входит в контур, с начальными нулевыми значениями.

Построение разбиения плоскости очередным максимально связным подграфом G_t начинается с выбора любой вершины из V , у которой нулевое значение номера подграфа. Выбранная вершина v приписывается t -ому подграфу.

Начальной дугой первого контура $c_1^{(t)}$ объявляем любую дугу с вершиной v и произвольно выбираем ее ориентацию. Концевой вершине (в соответствии с ориентацией) текущей дуги контура приписываем номер t -ого подграфа и продолжением контура является дуга, следующая за текущей в циклической последовательности дуг концевой вершины. Ориентация очередной дуги легко задается: конец текущей дуги является ее началом. Критерий окончания построения контура очевиден: очередная дуга ему принадлежит.

Построение следующего контура отличается от вышеописанной процедуры только выбором начальной дуги: в качестве ее берем любую из дуг ранее построенных контуров, если она входит в состав только одного контура. Начальной дуге приписываем ориентацию противоположную ориентации, с которой она входит в состав построенного контура. Если такой дуги не существует, то все контуры $\{c_i^{(t)}\}_{i=1}^{n(G)}$ областей разбиения плоскости подграфом G_t построены.

Для задания областей $\{\Omega_i^{(t)}\}_{i=1}^{n(G)}$ осталось определить признаки их ограниченности $\omega_i = (\infty \in \Omega_i^{(t)})$. Для этого достаточно определить номер контура неограниченной области (она одна). Найдем вершину $P_\partial \in V_t$ с максимальной абсциссой. Точка $P = P_\partial + (1, 0)$ лежит в неограниченной области. Значит осталось определить тот контур, между дугами которого лежит отрезок $[P_\partial, P]$ (см. рис.2).

Теперь построим разбиение плоскости всем семейством дуг $c_i^{(t)}$. Пусть $\{O_i^{(1)}\}_{i=1}^{n(G)}$ = $\{\Omega_i^{(1)}\}_{i=1}^{n(G)}$.

Все вершины v_1, v_2 лежат в одной из областей $\{O_i^{(1)}\}$. Найдем ее номер m из условия $\chi_{O_m^{(1)}}(v) = 1$, где v – одна из вершин v_1, v_2 . Тогда разбиение плоскости $\{O_i^{(2)}\}_{i=1}^{n(G_1)+n(G_2)-1}$ семейством дуг $c_1 \cup c_2$ состоит

- из всех областей $\{O_i^{(1)}\}_{i=1, i \neq m}^{n(G)}$,
- области $O_m^{(1)} \cap \Omega_{i_\infty}^{(2)}$, где $i_\infty : \infty \in \Omega_{i_\infty}^{(2)}$;
- признак ограниченности этой области совпадает с признаком ограниченности $O_m^{(1)}$; набор ее контуров с признаками ограниченности состоит из контуров с признаками ограниченности областей $O_m^{(1)}$ и $\Omega_{i_\infty}^{(2)}$,
- из всех областей $\{\Omega_i^{(2)}\}_{i=1, i \neq i_\infty}^{n(G_2)}$.

Повторяя эту процедуру для всех оставшихся разбиений плоскости $\{\Omega_i^{(t)}\}_{i=1}^{n(G)}$, $t = 3, \dots, n(G)$, получим разбиение плоскости

$$\{\Omega_i\}_{i=1}^{n(G)} = \{O_i^{(n(G))}\}_{i=1}^{n(G_1)+\dots+n(G_{n(G)})-n(G)+1}$$

дугами c_i .

3.3 Построение объекта C

Выделим из $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n(G)}$ все области, лежащие в результирующем множестве C теоретико-множественной операции (объединение их замыканий совпадает с замыканием множества C). Для этого сначала определим принадлежность каждой области Ω_i объектам A и B : $\chi(\Omega_i, A) = (\Omega_i \subset A)$, $\chi(\Omega_i, B) = (\Omega_i \subset B)$; и ее принадлежность объекту C в зависимости от типа регуляризованной теоретико-множественной операции:

$$\begin{aligned} \chi(\Omega_i, C) &= \chi(\Omega_i, A \cup B) = (\chi(\Omega_i, A) \vee \chi(\Omega_i, B)), \\ \chi(\Omega_i, C) &= \chi(\Omega_i, A \cap B) = (\chi(\Omega_i, A) \wedge \chi(\Omega_i, B)), \\ \chi(\Omega_i, C) &= \chi(\Omega_i, A \setminus B) = (\chi(\Omega_i, A) \wedge \neg \chi(\Omega_i, B)). \end{aligned}$$

Для определения включения области Ω_i в объект A (или B) достаточно проверить принадлежность объекту только одной (любой) точки области. В качестве контрольной точки можно взять точку граничной дуги области Ω_i , если эта дуга не принадлежит границе объекта. Но, если граничная дуга области Ω_i принадлежит границе объекта, то совпадение их ориентаций будет означать принадлежность области объекту, а несовпадение их ориентаций будет означать принадлежность области дополнению объекта

до плоскости.

Обозначим через I – множество номеров всех областей $\Omega_i \subset C$, т.е. $\bar{C} = \cup_{i \in I} \bar{\Omega}_i$. Очевидно, что

$$C = \{\emptyset\}, \text{ если } I = \{\emptyset\},$$

$$C = R^2, \text{ если } \chi(\Omega_i, C) = \text{true } \forall i = 1, \dots, n(,).$$

Для завершения теоретико-множественной операции осталось объединить каждую пару областей из $\{\Omega_i\}_{i \in I}$, имеющих общие участки границ.

Пусть области Ω_i и Ω_j , $i, j \in I$, с граничными представлениями

$$\begin{aligned} B(\Omega_i) &= \langle \{c_k^{(i)}, \omega_k^{(i)}\}_{k=1}^{n(i)}, \omega_i \rangle, \\ c_k^{(i)} &= \langle \gamma_1^{(i,k)}, \dots, \gamma_{n(i,k)}^{(i,k)} \rangle, \\ B(\Omega_j) &= \langle \{c_l^{(j)}, \omega_l^{(j)}\}_{l=1}^{n(j)}, \omega_j \rangle, \\ c_l^{(j)} &= \langle \gamma_1^{(j,l)}, \dots, \gamma_{n(j,l)}^{(j,l)} \rangle, \end{aligned}$$

имеют общие граничные дуги (естественно с различной ориентацией). Заметим, что *все общие дуги принадлежат одному контуру* $c_k^{(i)}$ области Ω_i и *одному контуру* $c_l^{(j)}$ области Ω_j .

Одна из областей этой пары всегда ограничена. Для определенности будем считать, что ограничена область Ω_j . На рис.5. и рис.7. приведены примеры двух ограниченных областей с общими участками границ γ и β .

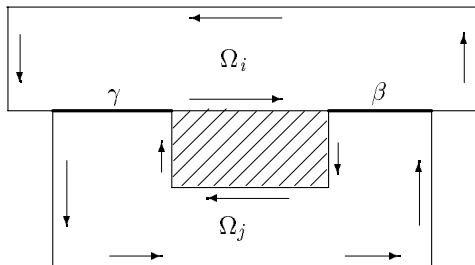


Рис. 5.

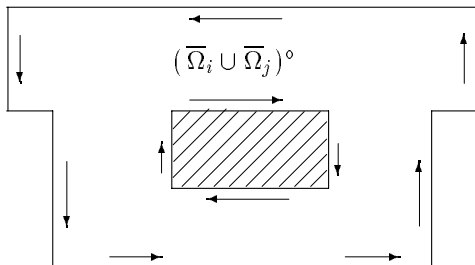


Рис. 6.

Случай $\omega_i = \text{false} \wedge \omega_j = \text{false} \wedge$
 $\wedge \omega_k^{(i)} = \text{false} \wedge \omega_l^{(j)} = \text{false},$

т.е. ограниченные области совпадают по участкам контуров – границ ограниченных односвязных обла-

стей: $\Omega_k^{(i)}$ и $\Omega_l^{(j)}$, из представлений

$$\Omega_i = \bigcap_{m=1}^{n(i)} \Omega_m^{(i)}, \quad \Omega_j = \bigcap_{m=1}^{n(j)} \Omega_m^{(j)}.$$

Именно этот случай изображен на рис.5. Результат регуляризованного объединения областей приведен на рис.6.

Граничное представление ограниченной области $\Omega_{i,j} = (\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_j)^0$ состоит из всех контуров областей Ω_i и Ω_j , кроме контуров $c_k^{(i)}$ и $c_l^{(j)}$:

$$\{c_m^{(i)}, \omega_m^{(i)}\}_{m=1, m \neq k}^{n(i)}, \quad \text{и} \quad \{c_m^{(j)}, \omega_m^{(j)}\}_{m=1, m \neq l}^{n(j)},$$

и набора контуров, получаемых в результате обработки контуров $c_k^{(i)}$ и $c_l^{(j)}$ по следующему правилу.

Обозначим через \cdot множество всех ориентированных дуг контуров $c_k^{(i)}$ и $c_l^{(j)}$ за исключением их общих дуг (с разными ориентациями), а через V множество попарно различных вершин дуг из \cdot . Кроме того, будем считать, что все дуги с концевой точкой $v \in V$ циклически упорядочены в соответствии с обходом границы окрестности (точек ее пересечения с дугами) вершины по часовой стрелке (см. рис.4).

Ориентированный граф $G = (V, \cdot)$ распадается на максимальные связные компоненты (одну или больше) $\{G_t = (V_t, \cdot_t)\}_{t=1}^{n(G)}$.

Каждый ориентированный подграф G_t состоит из всех дуг одного из искоемых контуров: $c_t^{(i,j)}$. Начальной дугой $c_t^{(i,j)}$ объявляем любую дугу из \cdot_t . Продолжением контура является дуга, следующая за текущей в циклической последовательности дуг концевой вершины текущей дуги. Критерий окончания построения контура очевиден: очередная дуга ему принадлежит.

Все построенные контуры $\{c_t^{(i,j)}\}_{t=1}^{n(G)}$, кроме одного, являются ориентированными контурами неограниченных областей. Следовательно, для завершения построения граничного представления области $\Omega_{i,j} = (\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_j)^0$ осталось определить единственный контур – границу ограниченной области. Найдем вершину $v_{max} \in V$ с максимальной абсциссой. Контур, содержащий эту вершину, является искомым.

Случай $\omega_i = \text{false} \wedge \omega_j = \text{false} \wedge$
 $\wedge \omega_k^{(i)} = \text{true} \wedge \omega_l^{(j)} = \text{false},$

т.е. ограниченные области совпадают по участкам контуров – границы неограниченной односвязной области $\Omega_k^{(i)}$ и границы ограниченной односвязной области $\Omega_l^{(j)}$, из представлений

$$\Omega_i = \bigcap_{m=1}^{n(i)} \Omega_m^{(i)}, \quad \Omega_j = \bigcap_{m=1}^{n(j)} \Omega_m^{(j)}.$$

Именно этот случай изображен на рис.7. Результат регуляризованного объединения областей приведен на рис.8.

Анализ этого случая полностью совпадает с анализом предыдущего случая за исключением того

факта, что все контуры $\{c_t^{(i,j)}\}_{t=1}^{n(G)}$ являются границами неограниченных односвязных областей.

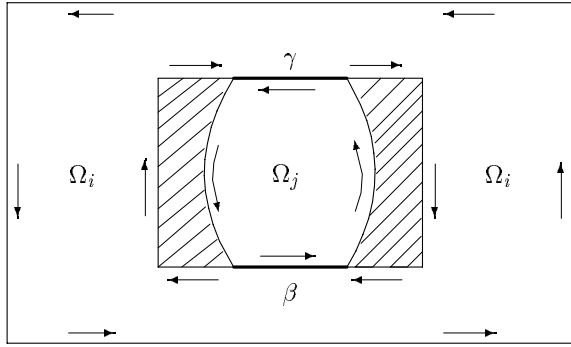


Рис. 7.

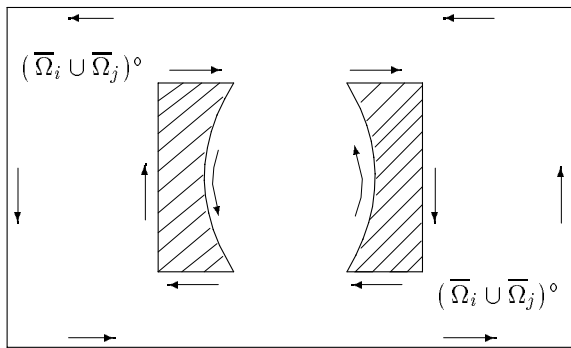


Рис. 8.

Случай $\omega_i = true \wedge \omega_j = false \wedge \omega_k^{(i)} = true \wedge \omega_l^{(j)} = false$,

т.е. неограниченная область Ω_i и ограниченная область Ω_j совпадают по участкам контуров – границы неограниченной односвязной области $\Omega_k^{(i)}$ и границы ограниченной односвязной области $\Omega_l^{(j)}$, из представлений

$$\Omega_i = \bigcap_{m=1}^{n(i)} \Omega_m^{(i)}, \quad \Omega_j = \bigcap_{m=1}^{n(j)} \Omega_m^{(j)}.$$

Пример такого случая изображен на рис.9. Результат регуляризованного объединения областей приведен на рис.10.

Анализ этого случая полностью совпадает с анализом предыдущего случая за исключением того факта, что $\Omega_{i,j} = (\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_j)^o$ – неограниченная область.

Других случаев нет.

Заменим во множестве областей $\{\Omega_m\}_{m \in I}$ рассмотренную область Ω_i на построенное регуляризованное объединение $\Omega_{i,j} = (\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_j)^o$, а область Ω_j из множества областей $\{\Omega_m\}_{m \in I}$ исключим. Полученное множество областей (и их граничных представлений) снова будем обозначать через $\{\Omega_m\}_{m \in I}$.

Процесс последовательной модификации множества $\{\Omega_m\}_{m \in I}$ будем продолжать до тех пор, пока в нем будет существовать хотя бы одна пара областей

с общими граничными дугами.

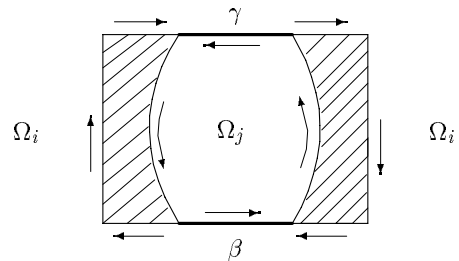


Рис. 9.

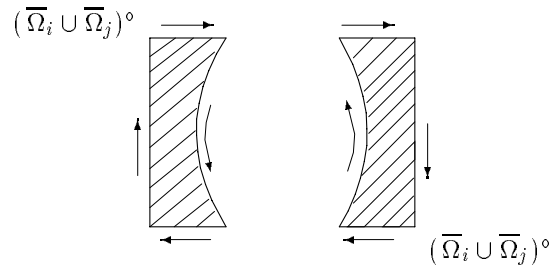


Рис. 10.

По окончании этого процесса совокупность граничных представлений областей $\{\Omega_m\}_{m \in I}$ и есть граничное представление объекта C , как результата теоретико-множественной операции с объектами A и B .

Замечание 3.3. (о регуляризованном дополнении)

Пусть на плоскости R^2 заданы объект

$$B = \bigcup_{i=1}^{n(B)} \Omega_i^{(B)},$$

состоящий из конечного числа попарно непересекающихся односвязных или многосвязных областей, контурные граничные представления которых известны (см. (1)) и требуется найти граничное представление его регуляризованного дополнения:

$$C = R^2 \setminus \bar{B}.$$

Введем объект $A = R^2$ с граничным представлением

$$B(R^2) = \langle \text{контуров нет } (n(R^2) = 0), \omega_{(R^2)} = true \rangle.$$

Для решения поставленной задачи можно применить только что описанный алгоритм для реализации регуляризованного теоретико-множественного вычитания $C = A \setminus^* \bar{B}$. При этом точек пересечения границ искать не придется (их нет) и все области разбиения плоскости лежат в A .

Можно было бы предложить другой алгоритм, основанный на том, что контуры объекта C образуют ориентированный граф (V, \cdot) , дуги которого равны дугам объекта B с обратной ориентацией.

4. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Tilove R.B. Set Membership Classification: A Unified Approach to Geometric Intersection Problem. - IEEE Trans. on Comput., 1980, vol. C-29, No. 10, pp. 874-883.
- [2] Дебелов В.А., Мацокин А.М., Упольников С.А. Разбиение плоскости кривыми Безье // Труды 7-ой международной конфер. по компьютерной графике и визуализации Графикон'97 (21-24 мая 1997, Москва.) — Протвино, 1997, с. 67-74.
- [3] Дебелов В.А., Мацокин А.М., Упольников С.А. Разбиение плоскости и теоретико-множественные операции // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 1998. — Т. 1, № 3. - в печати.
- [4] Guibas L., Sharir M. Chapter I. Combinatorics and Algorithms of Arrangements. - in. "New Trends in Discrete and Computational Geometry" / Pach J. (ed.), Springer-Verlag 1993, pp. 9-36.
- [5] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989, 432 с.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный алгоритм реализован на C/C++ в виде библиотеки функций. Данная реализация предполагает, что все кривые заданы в форме Безье. На уровень пользовательского интерфейса представлены такие функции как:

- разбиение плоскости на области множеством кривых;
- образование объекта как набора непересекающихся областей, без общих граничных дуг;
- объединение, пересечение и разность двух объектов;
- характеристическая функция объекта;
- разбиение прямой границами объекта.

Implementation of Set Operations on Plane

Resume

The given paper is devoted to detailed description of an algorithm for set operations (union, intersection, subtraction) on domains that have piece-wise smooth boundaries, Each piece of boundary is defined as a parametric cubic polynomial and it is convex and monotone function.

The algorithm is based on a subdivision of plane into domains by whole collection of boundary curves of both objects – operands of particular set operation. Then the resulting object is constructed from those domains.

The basic calculating operations are solving of a cubic equation via Cardano's formula and computing of intersection points of two parametric curves by Newton's method.

The algorithm was implemented in C as a library. Programmers interface includes the functions:

- plane subdivision into domains by a set of curves;
- creating an object as a set of non-intersecting domains;
- union, intersection, subtraction of two objects;
- characteristic function of an object;
- subdivision of a straight line by boundaries of an object.

Keywords: *plain domain, contour, characteristic function, subdivision of plain, regularized set operations.*

Authors:

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Division of RAS, Laboratory of Numerical Analysis & Computer Graphics. Novosibirsk, Russia.

Victor A. Debelov – senior researcher, PhD.,
E-mail: Debelov@oapmg.sccc.ru

Aleksandr M. Matsokin – head of laboratory, prof.,
E-mail: Matsokin@oapmg.sccc.ru